Slezská univerzita v Opavě
Matematický ústav v Opavě

Softwarová podpora matematických metod v ekonomice a řízení

Petr Seďa

Opava 2013

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Slezská univerzita v Opavě
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hrazeno z prostředků projektu OPVK CZ.1.07/2.2.00/15.0174
Inovace bakalářských studijních oborů se zaměřením na spolupráci s praxí

Obsah

Předmluva

Předložená studijní opora je určena především studentům 3. ročníku bakalářského studia na Matematickém ústavu Slezské univerzity v Opavě, ale také ostatních studijních oborů s ekonomicko-matematickým zaměřením. Její obsah i rozsah odpovídá učivu probíranému na seminářích v předmětu *Softwarová podpora matematických metod v ekonomice a řízení*. Předložený text představuje základní studijní oporu především pro přípravu ke cvičením a slouží také jako podklad pro vypracování samostatného semestrálního projektu.

Kurz *Softwarová podpora matematických metod v ekonomice a řízení* je určen pro studenty, kteří již absolvovali předcházející předměty *Matematické metody v ekonomii I. - III.* v bakalářském studiu na Matematickém ústavu Slezské univerzity v Opavě. Kromě výše uvedených prerekvizit jsou pro četbu tohoto učebního textu nutné předchozí znalosti zejména matematiky, informatiky, obecné ekonomie, podnikové ekonomie, ale také účetnictví.

Cílem této studijní opory ale není vysvětlování teorie, jedná se o jakousi cvičebnici dané problematiky na případových studiích a dalších zjednodušených příkladech z praxe. Smyslem je naučit studenty přemýšlet jak matematicky analyticky, tak ekonomicky, a pak správným způsobem tyto přístupy kombinovat a využívat, ale také naučit čtenáře přemýšlet nad danou problematikou a matematické metody v ekonomii používat správným způsobem. Každá kapitola obsahuje základní teoretickou část. Teorie je vždy následována řešenými a vysvětlovanými příklady, na závěr každé kapitoly je uvedeno a shrnutí.

Předložený text je členěn do čtyř základních kapitol. První kapitola je věnována tématu input-output modelů. Problematika Leontievových input-output modelů slouží k především k pochopení struktury produkčních jednotek z hlediska interních, ale také vnějších vazeb.

Ve druhé kapitole je modifikováno využití strukturních modelů ve formě bilančních podnikových modelů. Studenti se tak naučí analyzovat strukturu materiálových, energetických a hodnotových vazeb v podniku a logicky uvažovat o promítnutí vnitřních i vnějších změn za daných podmínek.

Kapitola třetí je zaměřena do oblasti lineárního programování. Lineární programování je klasickou disciplínou operačního výzkumu a tyto základy jsou nezbytnou součástí znalostí a dovedností v oblasti matematického modelování. Čtenář se naučí formulovat matematické modely a prostřednictvím nástroje *Řešitel* v prostředí MS Excel hledat optimální řešení a následně získané výsledky opět interpretovat. Nechybí zde ani úvod do modelování úloh dopravního problému resp. přiřazovacího problému.

Poslední kapitola je věnována základům teorie her a je zařazena až po úlohách lineárního programování. Studenti se učí hledat ryzí i smíšené strategie a při řešení opět využívají úlohy lineárního programování i nástroje *Řešitel* v MS Excel. Závěrem této části je přehledně uveden úvod do složitějších struktur v teorii her.

Skripta jsou obsahově koncipována a strukturována dle vybraných témat, jež jsou obsažena v předmětech *Matematické metody v ekonomii I. - III.,* která jsou aplikována ve vybraných oblastech z mikroekonomické, a také makroekonomické analýzy. Ve skriptech nejsou vysvětlována jednotlivá témata teorie a teoretické modely, anebo matematické principy důkladně. Důraz je kladen na spojitosti, soulad a součinnost disciplín při využití softwarové podpory v prostředí MS Excel a především na interpretaci výsledků.

Předložený text vznikl v rámci projektu OPVK CZ.1.07/2.2.00/15.0174 Inovace bakalářských studijních oborů se zaměřením na spolupráci s praxí na Matematickém ústavu Slezské univerzity v Opavě.

1. Input-output modely

Klíčová slova: konečné užití, matice, odvětví, region, vektor, výrobní spotřeba.

Problematika ekonomického rozvoje států a regionů se dostává do popředí v souvislosti s probíhající ekonomickou integrací České republiky do Evropské unie. I když politická integrace byla svým způsobem dovršena oficiálním vstupem ČR do EU dne 1. května 2004, samotný proces ekonomické integrace bude pokračovat ještě mnoho let.

Evropská unie je unií regionů. Tomu nasvědčuje i nedávno novelizovaný systém klasifikace územních statistických jednotek neboli regionů NUTS (La Nomenclature des Unités Territoriales Statistiques). Hlavním důvodem pro zavedení a prohloubení této společné evropské klasifikace územních celků je snaha o získávání ekonomických informací o územně srovnatelných regionech v jednotlivých členských zemích EU.

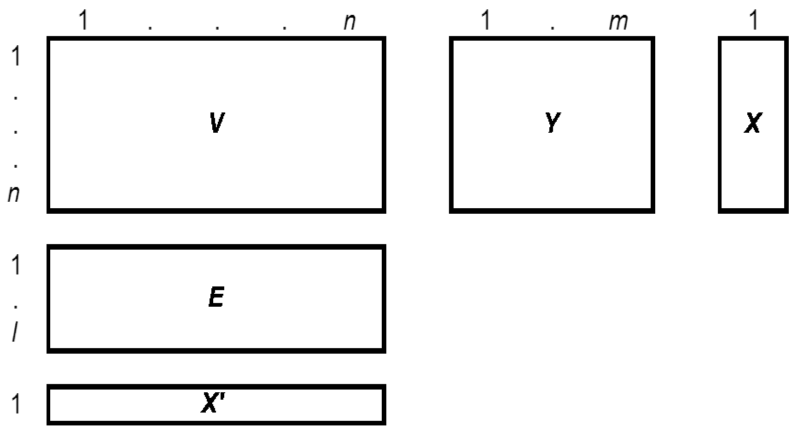
Potřeba vysvětlit a modelovat regionální rozvoj a úroveň meziregionální spolupráce se v poslední době opět dostává do popředí. Regionální ekonomické modely jsou paralelami obdobných modelů makroekonomických, národohospodářských, jejich základní jednotkou a středem zájmu však není stát, ale region – a to na různé úrovni chápání. Neboť však region může být stejně tak kraj (NUTS 3) jako celý stát (NUTS 0), stává se pojem regionální ekonomika v tomto smyslu obecnějším nežli národní ekonomika.

Input-output modely rozvoje regionů se v České republice používaly v 70. a 80. létech 20. století a po určitém útlumu se dostávají opět do popředí, neboť podle metodiky EUROSTATu mají být právě tyto modely jedním z nástrojů modelování regionálních a meziregionálních ekonomických toků.

1.1. Základní pojmy

Leontiefský input-output model klade důkaz na vztahy mezi jednotlivými resorty regionální ekonomiky. Základem tohoto modelu jsou vztahy (toky) mezi jednotlivými odvětvími, vstupy (importy) a výstupy (exporty), viz (Maier, G. a Tödling, F., 1997).

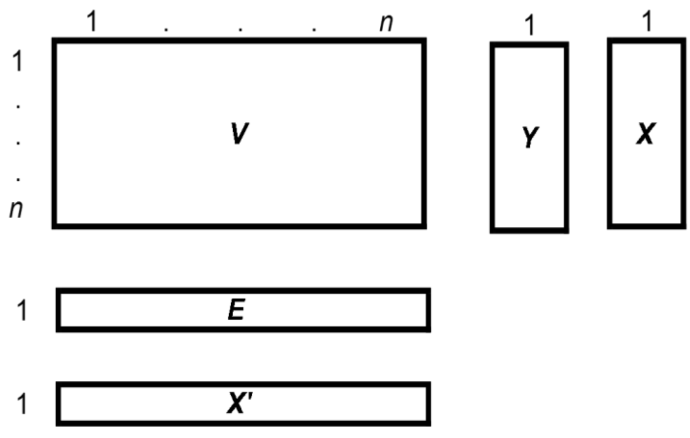
Na Obrázku 1.1 je znázorněna tabulková struktura Input-output modelu. Předpokládejme, že ekonomika regionu je tvořena n resorty, jejichž vzájemné vztahy (toky) vyjadřuje čtvercová matice meziodvětvových vztahů V řádu n $n \times n$. Do regionu přichází l vstupů, které se rozdělují mezi všech n odvětví, což vyjadřuje matice primárních vstupů E řádu $l \times n$. Obdobně výstupem regionální ekonomiky je *m* exportních poptávek, na kterých se podílí všechna odvětví, jak vyjadřuje matice konečné poptávky (spotřeby) *Y* řádu n x m . Součtem všech řádků, resp. sloupců matic dostaneme vektor hrubé výroby *X* řádu *n*, který představuje hodnotu celkové roční produkce všech jednotlivých vektorů regionu.



Obrázek 1.1: Tabulková struktura Input-output modelu

Počet resortů *n* určuje podrobnost celého modelu. Podrobné Input-output modely pracují až s několika sty odvětvími a několika desítkami kategorií vstupů a výstupů. Zjednodušené modely si vystačí i s několika málo resorty (např. zemědělství, těžký průmysl, lehký průmysl, ostatní), jedním vstupem a jedním výstupem.

Pro zjednodušení budeme předpokládat, že máme pouze jeden typ výstupu a jeden primární vstup, takže se nám matice *Y* a *E* změní na vektory, viz Obrázek 1.2.



Obrázek 1.2: Tabulková struktura zjednodušeného Input-output modelu

Sečteme-li v tomto schématu hodnoty v_{ij} v *i*-tém řádku matice *V* a přičteme hodnotu y_i vektoru *Y*, dostaneme příslušnou hodnotu hrubé výroby x_i :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} + y_i. \tag{1.1}$$

Takto lze vysledovat, v jakém rozsahu *i*-tý sektor dodává své produkty ostatním sektorům (hodnoty v_{ij}). Hodnota konečné spotřeby y_i zahrnuje spotřebu soukromých spotřebitelů, státního sektoru a export. Chceme-li tyto složky konečné poptávky rozlišit, musíme přejít na úplný model s maticí konečné spotřeby *Y,* viz Obrázek 1. 1.

Obdobně lze sčítat prvky matice *V* v jednotlivých sloupcích, kde po přičtení primárních vstupů e_j opět dostaneme hodnotu hrubé výroby x_j:

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} + e_j. \tag{1.2}$$

Tímto způsobem lze vyčíst, kolik *j*-tý sektor pro potřeby své produkce odebírá od ostatních sektorů (hodnoty v_{ij}) a kolik tvoří primární vstupy e_j – výkony soukromých domácností, státní dotace, import, atd.

Namísto matice absolutních meziodvětvových vztahů či toků *V* se často používá matice relativních (technologických) koeficientů přímé spotřeby *A*, jejíž hodnoty dostaneme jako:

$$a_{ij} = \frac{v_{ij}}{x_j}. \tag{1.3}$$

Rovnice (1.1) se nám tímto změní na tvar:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i. \tag{1.4}$$

Tuto rovnici můžeme pro všechny resorty (*i* = 1 až *n*) převést do podoby maticové rovnice:

$$X = AX + Y. \tag{1.5}$$

Vyjádříme-li z této rovnice vektor hrubé výroby *X*, dostaneme:

$$X = (I - A)^{-1} Y, \tag{1.6}$$

kde *I* je jednotková čtvercová matice řádu *n*. Matici $B = (I - A)^{-1}$ nazýváme Leontieffskou inverzní matici. Představuje multiplikátor tohoto modelu, její hodnoty

b_{ij} nazýváme koeficienty plné materiálové spotřeby. Udávají, o kolik více musí vyprodukovat sektor i, aby sektor j zvýšil výstup o jednotku.

1.2. Typy úloh

Pomocí strukturního Input-output modelu vyjádřeného výše uvedenou rovnicí (1.5), resp. (1.6) můžeme řešit tři základní typy úloh:

a) známe celkovou produkci X a hledáme konečnou spotřebu Y;

b) známe konečnou spotřebu Y a hledáme celkovou produkci X;

c) známe některé složky vektoru X, některé vektoru Y a hledáme ostatní.

Ze znalosti lineární algebry můžeme odvodit, kdy má která úloha jednoznačné řešení. Úloha (a) je triviální a dává pro danou matici A a vektor X vždy jednoznačné konečné řešení. Úloha (b) má jednoznačné konečné řešení pouze v případě, že matice $I - A$ je regulární, tj. $\det(I - A) \neq 0$.

Aby řešení bylo smysluplné, je třeba také požadovat, aby hodnoty vektoru X a Y byly kladné. I tyto podmínky lze sice matematicky specifikovat, ale pro jejich složitost je v tomto příspěvku nebudeme uvádět.

Řešený příklad 1.1:

V Tabulce 1.1 je zachycena jednoduchá hypotetická input-output tabulka se třemi odvětvími: zemědělství Z, průmysl – P, služby – S a vždy pouze jednu konečnou spotřebu Y a primární vstup I. Všechny hodnoty jsou uvedeny v peněžních jednotkách.

	Z	P	S	Y	X
Z	400	40	40	400	880
P	40	460	400	50	950
S	300	320	120	50	800
I	140	130	240		
X	880	950	800		

Tabulka 1.1: Příklad vstupní input-output tabulky

Podívejme se na řádek průmysl a na sloupec služby. Prvek v matici vztahů nacházející se na průsečíku těchto dvou odvětví ukazuje, jakou hodnotu zboží dodal těžký průmysl odvětví lehkého průmyslu. V tomto případě se jedná o 400 peněžních jednotek. Matice vztahů popisuje dodávky pro všechny kombinace odvětví včetně dodávek každého odvětví sobě samému (leží na úhlopříčce).

Průmysl samozřejmě nedodává pouze sektorům ve svém vlastním regionu, ale část produktů dodává státním investorům nebo spotřebitelům v jiných regionech. Tito odběratelé představují konečnou spotřebu (sloupec *Y*).

Pokud zkoumáme celý řádek služeb, matice vztahů a vektoru konečné spotřeby *Y*, můžeme takto zjistit strukturu dodávek tohoto sektoru. Můžeme vidět, které jiné sektory konečné spotřeby jsou jeho hlavními odběrateli, komu tento nic nedodává atd.

Tak jako je nereálné, že by průmysl dodával pouze jiným odvětvím, také nevystačí služby s meziprodukty jiných odvětví. Vyžaduje pracovní výkony také soukromých společností, státní výkony, importované zboží atd., aby mohl vyrábět zboží. Všechny tyto výkony se označují jako primární inputy a jsou sumarizovány v matici primárních vstupů. Pokud zkoumáme celkový sloupec služeb, vidíme, jaké vstupy tento sektor vyžaduje, aby mohl produkovat svoje výstupy.

Vztahy podle rovnic (1.1) a (1.2) lze v maticové podobě zapsat následujícím způsobem:

$$X = VI + YI, \tag{1.7}$$

$$X' = I'V + I'E. \tag{1.8}$$

Na základě Tabulky 1.1 je možné vztahy (1.7) a (1.8) vypočítat, výpočty jsou uvedeny Tabulce 1.1.

Jak jsme již ukázali, jednotlivé sloupce input-output tabulky popisují, jak jednotlivé sektory nasazují primární vstupy a výstupy jiných sektorů. Pokud tvrdíme, že různé inputy jsou dosazené vždy ve stejném poměru, můžeme z jednotlivých sloupců jednoduše zjistit, kolik jednotlivých vstupů je potřebných na produkci jedné jednotky výstupu daného sektoru. Postupujeme dle vztahů (1.3) a (1.6). Koeficienty vycházející z našeho příkladu jsou uvedeny v Tabulce 1.2. Koeficienty meziodvětvových vztahů sumarizujeme v matici *A* a koeficienty primárního inputu v matici *B*.

Například hodnota 0,34 ve třetím řádku a prvém sloupci matice tedy udává, že odvětví zemědělství potřebuje od odvětví služeb inputy v hodnotě 0,47 peněžní jednotky, aby mohlo vytvořit jednu jednotku hodnotového produktu. Zároveň zemědělství pro tento výstup potřebuje primární vstupy v hodnotě 0,19 peněžní jednotky. Ostatní koeficienty v tabulce můžeme interpretovat podobným způsobem.

	Z	P	S
Z	0,46	0,04	0,05
P	0,05	0,48	0,5
S	0,34	0,34	0,15
E	0,16	0,14	0,30

Tabulka 1.2: Koeficienty inputu

Logicky vzniká také otázka, kolik musí jednotlivá odvětví celkově vyprodukovat, aby se mohlo dodat určité množství výrobků pro konečnou spotřebu. Odpověď dostaneme vyřešením rovnice (1.5).

Pro zjednodušení zápisu v maticovém tvaru považujeme konečnou spotřebu za vektor. Pokud vztah (1.5) upravíme tak, abychom vyjádřili vektor X podle rovnice (1.6).

Podle pravidel výpočtu inverzní matice získáme matici, která je znázorněna v Tabulce 1.3. Výraz $(I - A)^{-1}$ se nazývá Leontievova inverzní matice. Její hodnoty udávají, o kolik více přímých a nepřímých efektů musí vyprodukovat sektor v řádku, aby mohl sektor ve sloupci dodat jednotku výrobku konečné spotřebě. V tomto případě se jedná o hodnoty uvedené v Tabulce 1. 3.

Náš konkrétní příklad ukazuje, že zvýšení poptávky po produktech služeb nezpůsobuje silné zvýšení poptávky pouze v odvětví služeb o 2,24 jednotky, ale také v odvětví průmyslu, a to o 1,34 jednotky. Naproti tomu zemědělství zůstává vzhledem k přírůstku poptávky nedotknuté. Svou produkci musí zvýšit pouze o 0,13 jednotky.

	Z	P	S
Z	1,26	0,12	0,13
P	1,43	2,38	1,34
S	1,66	1,25	2,24

Tabulka 1.3: Leontievova inverzní matice

Jestliže nás zajímá celkový růst produkce, který vyvolá zvýšení poptávky v jednom odvětví, musíme spočítat hodnoty jednotlivých sloupců Leontievské inverzní matice. Tabulka 1. 4 ukazuje, že zvýšení poptávky v zemědělství způsobuje největší hospodářský efekt. Hospodářský politik, který sleduje cíl oživení hospodářství pomocí zvýšení státní poptávky, by udělal správné rozhodnutí, kdyby vydal rozpočtové prostředky na zemědělské produkty. Tím dosáhne největšího efektu.

Z	T	L
4,35	3,75	3,71

Tabulka 1.4: Celkové efekty

Pokud se však hospodářský politik zaměří na zvýšení zaměstnanosti, jeví se problém v poněkud jiné formě. Pracovní síly jsou nasazené v různých odvětvích v různém objemu. O jaký objem jde, vyjadřuje příslušný řádek matice koeficientů primárního inputu. Na to, abychom zjistili, jak se mění nasazení primárních inputů při zvýšení poptávky jednotlivých odvětví o jednotku, musíme Leontievovu inverzní matici znova vynásobit maticí koeficientu primárního vstupu:

$$\Delta E = B(I - A)^{-1}. \tag{1.9}$$

Matice ΔE popisuje, jak velké jsou požadavky na jednotlivé primární inputy, když se zvýší poptávka po produkci jednoho odvětví. V našem příkladu přitom vycházejí přitom náhodou pro všechny tři odvětví téměř identické hodnoty (1,012; 1,008; 1,011).

Jak je vidět, pomocí input-output analýzy je možné odpovědět na rozličné ekonomické otázky. Výchozím bodem všech těchto odpovědí je předpoklad konstantní matice koeficientů. To znamená, že předcházející výrobky a primární vstupy v jednotlivých odvětvích budou nasazené ve stejných poměrech nezávisle od vyrobeného množství.

Co se týče matematického aparátu, konkrétně maticového počtu, operace s maticemi v prostředí MS Excel jsou popsány v matematickém dodatku.

Shrnutí:

První kapitola byla věnována problematice Leontievových input-output modelů, které slouží jako vhodný nástroj pro vyjádření meziodvětvových vztahů v ekonomice. Pomocí bilančních rovnic či maticového počtu lze v zásadě řešit tři základní typy úloh: jestliže známe celkovou produkci *X*, hledáme konečnou spotřebu *Y* nebo naopak, případně známe některé složky vektoru celkové produkce a některé složky vektoru konečné spotřeby a hledáme zbylé z nich. Kapitola je zakončena ilustrací řešení na příkladu fiktivního regionu.

2. Podnikové bilanční modely

Klíčová slova: matice, meziodvětvové vztahy, podnik, vektor.

K nejčastěji využívaným a rovněž historicky nejstarším popisným modelům používaným v ekonomii patří input-output modely, jejichž původním smyslem a cílem bylo zobrazení vztahů v reprodukčním procesu na národohospodářské úrovni, viz kapitola 1. Matematicky formulované bilance sestavované pouze pro tyto účely se pak postupně začaly využívat také na podnikové úrovni. Nyní je nedílnou součástí plánování a praxe podniků, viz (Gros, I., 2003).

Pomocí podnikových bilančních modelů lze formalizovat na podnikové, ale také vnitropodnikové úrovni různé možnosti či varianty základních materiálových, energetických nebo hodnotových vazeb a vztahů mezi prvky příslušného modelovaného systému. Jejich realizace je pak nutnou podmínkou pro transformaci vstupů na požadované výstupy.

Podnikových bilanční modely se pak využívají především v procesu plánování. Umožňují totiž algoritmizaci bilančních propočtů, které jsou nutné pro tvorbu např. plánů distribuce, výroby, zásobování v podnicích či operativního rozpisu výrobních úkolů. Bez nich není možné v podnicích, které pracují se složitými materiálovými toky efektivně zpracovávat požadované plány variantně a hledat tak nejlepší možný způsob splnění požadavků trhu.

Potřebné bilance jsou zajišťovány pomocí moderních informačních systémů, ale také jinými prostředky, a to např. s využitím síťové struktury. Matematicky zapsané vazby mezi prvky modelovaného systému jsou přesto nutným východiskem k formulaci modelů příslušných rozhodovacích situací, a to zejména při řízení hmotných toků, ale také hledání optimálních řešení. Bilanční modely lze rovněž využít pro účely vyhodnocení vlivu změn např. v materiálových tocích na způsob transformace vstupů na výstupní veličiny.

Pokud vyjádříme bilanční model má ve formalizovaném tvaru, má tento podobu soustavy rovnic, a to obvykle lineárních. Cílem řešení této soustavy je pak nalezení hodnot požadovaných proměnných za pomocí zadaných parametrů. Proces konstrukce bilančních modelů je analogický s obecnou metodologií vědeckých metod řízení.

2.1. Identifikace prvků a vazeb podnikového bilančního modelu

První fáze řešení podnikového bilančního modelu spočívá v identifikaci jeho prvků. Do podnikových bilančních modelů vystupují jako vstupní prvky jednotlivé výrobky, polotovary, zpracované suroviny, paliva či energie atd. V odborné literatuře se často používá pojem „výrobkově definované prvky“. V případě rozsáhlých výrobních systémů ovšem u takto definovaných prvků strmě narůstá rozměr příslušných modelů. Například v případě středně velké firmy s relativně pestrým sortimentem může dosáhnout počet prvků až hodnoty několika tisíc. V těchto případech se občas využívají prvky, které vznikají agregací jednotlivých prvků do skupin, a to dle rozličných kritérií.

V následujícím kroku je vhodné grafickou formou znázornit materiálové, ale také například energetické vazby mezi definovanými prvky analyzovaného systému. Možným zdrojem pro konstrukci grafu jsou například technologické předpisy nebo kusovníky pro výrobu jednotlivých výrobků.

2.2. Definice proměnných a parametrů podnikového bilančního modelu

V praktické aplikaci bilančních modelů se obvykle používají pro stanovené nebo vypočítané množství polotovarů či výrobků s ohledem na jejich různé určení celkem tři veličiny. Jedná se o:

a) produkci *j*-tého výrobku y_j, popřípadě polotovaru, který je určen ke spotřebě mimo bilancovaný systém, u modelů podnikových se pak jedná především o požadavky zákazníků,

b) spotřebu *i*-tého výrobku x_{ij} na výrobu x_j jednotek *j*-tého výrobku, pro *i*, *j*=1, 2,…, *n*, kde *n* je celkový počet bilancovaných polotovarů a také výrobků,

c) celkovou produkci *j*-tého výrobku x_j, a to bez ohledu na jeho další určení.

V případě materiálových vstupů se pak používá symbol s_i, který představuje jejich hledané celkové množství potřebné ke splnění požadavků zákazníků.

Klasická podoba bilančních modelů využívá pro formulaci závislostí spotřeby *i*-tého výrobku na *j*-tém předpokladu přímé úměrnosti či závislosti na objemu produkce *j*-tého výrobku. Podobně lze předpokládat přímou závislost mezi spotřebou *i*-tého materiálového vstupu a výrobou *j*-tého polotovaru či výrobku. Je možné tedy zapsat:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j , \tag{2.1}$$

$$s_i = s_{ij} x_j , \tag{2.2}$$

kde a_{ij} jsou specifické potřeby i-tého polotovaru a s_{ij} specifické spotřeby materiálových vstupů pro i = 1, 2,…, m, kde m je počet bilancovaných materiálových vstupů na jednotkové množství j-tého polotovaru nebo výrobku. Tyto potřeby pak patří k rozhodujícím parametrům podnikového bilančního modelu. Na jejich přesnosti pak závisí také správná funkce modelu. Obvykle jsou v podnicích jejich hodnoty normovány pro dané plánovací období.

2.3. Formulace podnikového bilančního modelu a jeho kvantifikace

Samotná formulace podnikového bilančního modelu je po zvládnutí předchozích kroků relativně velice jednoduchá a spočívá ve dvou základních etapách.

V prvním kroku je nutné formulovat model meziodvětvových vztahů, jenž je založen na požadavku, aby se celkové množství vyrobených výrobků rovnalo součtu požadavků zákazníků na jednotlivé výrobky a jejich vlastní spotřeby v modelovaném podnikovém systému. Při využití definovaných symbolů v kapitole 2.2 pak bude mít bilance k-tého výrobku obecný tvar. Teoreticky lze předpokládat, že by na každý výrobek mohly být spotřebovávány všechny vyráběné výrobky:

$$x_k = x_{k1} + x_{k2} + ... + x_{kn} + y_k, \tag{2.3}$$

neboli po dosazení za x_{ij} lze upravit na tvar:

$$x_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n + y_k. \tag{2.4}$$

Bilance mezivýrobkových vztahů pro všech n produkovaných výrobků a polotovarů má potom tvar:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2, \\ &... \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + y_n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ve druhém kroku je pak nutné sestavit bilanční model pro stanovení požadované velikosti materiálových vstupů pro p-tou surovinu:

$$s_p = s_{p1}x_1 + s_{p2}x_2 + ... + s_{pn}x_n. \tag{2.6}$$

Bilance všech m materiálových vstupů je možné formulovat jako soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + \ldots + s_{1n}x_n, \\
s_2 &= s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + \ldots + s_{2n}x_n, \\
&\ldots \\
s_m &= s_{m1}x_1 + s_{m2}x_2 + \ldots + s_{mn}x_n.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Pro samotnou práci s modelem i jeho počítačové zpracování je však mnohem výhodnější používat maticový zápis. Také pro jeho počítačové zpracování je vhodnější maticový zápis obou částí bilančního modelu. Označme tedy:

a) *A* čtvercovou matici typu (*m, n*), jenž je tvořena měrnými spotřebami polotovarů a_{ij}. Z věcné náplně prvků matice je zřejmé, že vysoké procento prvků matice se může rovnat nule. Ne všechny polotovary se totiž používají pro výrobu jednotlivých výrobků. Pokud v podnikovém systému neexistují zpětné vazby, pak se bude jednat o matici trojúhelníkovou.

b) *B* matici typu (*m, n*), která je tvořena měrnými spotřebami materiálových vstupů na jednotlivé výrobky a polotovary s_{ij}.

c) *x* vektor celkových produkcí typu x_j (*n, l*). Prvky vektoru mohou být v bilančních modelech jen nezáporné.

d) *y* vektor celkových produkcí určených pro spotřebu mimo modelovaný podnikový systém typu (*n, l*), přičemž v nejobecnějším případě je možné prvky vektoru rozdělit na dvě samostatné části, a to na: produkci větší nebo rovnou nule, která je určena pro dodávky mimo modelovaný systém podniku během daného plánovacího období, označme ji např. y_{oj} a druhá část pak představuje změnu stavu zásob výrobků, které má podnik na skladě y_{zj}, která bude kladná v případě nutnosti vytvoření kladné zásoby výrobku pro příští období anebo záporná v případě, kdy podnik v plánovacím období plánuje vyčerpat pro krytí potřeb např. zákazníků zásobu vytvořenou již v předcházejícím období. V případě, že bude ve sledovaném období spotřebovávána pouze již dříve vytvořená zásoba, bude příslušná hodnota daného *y* vektoru záporná. Množství výrobku, které je třeba vyrobit, se tak snižuje o již vytvořenou zásobu.

e) *s* pak představuje vektor hledaných celkových požadavků na materiálové vstupy s_i.

Model meziodvětvových výrobkových vztahů je potom možné zapsat pomocí rovnice v maticovém tvaru:

$$x = y + Ax, \tag{2.8}$$

kterou je možné interpretovat tak, že celková produkce výrobku se rovná produkci, která je určená ke spotřebě mimo vlastní podnikový modelovaný systém, ale také k vlastní spotřebě uvnitř modelovaného systému podniku. Model spotřeby energetických a materiálových vstupů pak můžeme zapsat rovnicí:

$$Bx = s. \tag{2.9}$$

Významnou součástí plánovacího procesu v každém podniku je také ověření reálnosti plánu z hlediska dostupných kapacit výrobních zařízení, strojů nebo počtu pracovní síly. Podnikový bilanční model je proto doplňován modelem kapacitním. Protože má tento model stejnou podobu, jako má dříve definovaný model spotřeby materiálových vstupů a liší se pouze náplní proměnných modelu, je možné jej zapsat přímo v maticovém tvaru:

$$Cx = f. \tag{2.10}$$

kde C je obdelníková matice typu (r, n), kde r je počet bilancovaných zařízení, např. strojů atd., jejíž prvky t_{ij} $i = 1,2,...,r$ jsou specifické spotřeby aparaturního času nejčastěji v hodinách na jednotku produkce výrobků či polotovarů, f je vektor typu (r, l) hledaných požadavků na doby činnosti f_i bilancovaných strojů či linek.

2.4. Řešení podnikového bilančního modelu pomocí maticového počtu

Při řešení sestavených bilančních modelů nejsou nutné žádné speciální znalosti matematiky. Přesto má řešení těchto modelů svá specifika. Model mezivýrobkových vztahů, viz rovnice (2.8), představuje v první fázi výpočtu po dosazení hodnot a_{ij} soustavu n bilančních rovnic o $2n$ neznámých x_j a y_j. V případě, že lze v podnicích vyrábět na strojích či zařízeních různé výrobky, mají jednoznačnou prioritu požadavky zákazníků. Za výchozí hodnoty jsou považovány konkrétní objednávky zákazníků, případně předpovědi o výši možné poptávky po jednotlivých výrobcích. Ty pak tvoří základ pro stanovení hodnot y_{oj}. Poté, co provedeme zpřesnění požadavků stavem zásob výrobků na skladě y_{zi}, je možné kvantifikovat vektor y. Cílem bilance je pak určit, jaké množství výrobků vyrábět, aby byly uspokojeny požadavky zákazníků. Řešením rovnice (2.8) dostaneme:

$$x = \; E - A \;^{-1} y, \tag{2.11}$$

nebo také po dosazení za: $E - A \;^{-1} = U$,

$$x = Uy, \tag{2.12}$$

kde E je jednotková matice, U je pak čtvercová inverzní matice k matice $E - A^{-1}$. Její prvky u_{ij} pak představují tzv. souhrnné měrné spotřeby polotovarů na jednotlivé výrobky. Výpočet inverzních matic je popsán v Matematickém dodatku.

Bilanci spotřeby vstupů materiálů lze upravit dosazením odvozeného výrazu (2.10) do rovnice (2.9). Získáme pak požadavky na vstupy, a to ve tvaru funkce požadovaných výstupů:

$$s = B\ \ E - A^{-1} y. \tag{2.13}$$

Prvky matice $V = B\ \ E - A^{-1}$, které označíme v_{ij}, pak představují úplné měrné spotřeby vstupů materiálů či energie. Ty jsou přepočteny na jednotlivé výrobky a polotovary. Podobně je možné upravit bilanci kapacit. Získáme tak rovnici ve tvaru:

$$f = C\ \ E - A^{-1} y. \tag{2.14}$$

Prvky matice $W = C\ \ E - A^{-1}$, které označíme w_{ij}, představují úplné měrné spotřeby času činnosti konkrétního zařízení na jednotlivé výrobky a polotovary, které se na nich vyrábějí.

Matice V a W není nutné počítat, protože hledané požadavky na vstupy je možné určit přímo podle vztahu (1.9) nebo (1.10), a to dosazením vypočtených hodnot vektoru x.

Podnikový bilanční model je možné v souhrnném tvaru zapsat v následující podobě:

$$\begin{aligned} & E - A^{-1} y = x, \\ & B\ \ E - A^{-1} y = s, \\ & C\ \ E - A^{-1} y = f, \\ & U\ y = x, \\ & V\ y = s, \\ & W\ y = f, \\ & \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} x \\ s \\ f \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

V některých případech je možné vyjít z celkové produkce, kterou je podnik schopen v daném období vyrobit. Výsledkem takových propočtů je potom bilance množství výrobků, které dodá podnik zákazníkům z vlastní výroby. Za hodnoty x_j je možné dosadit kapacity obvykle jednoúčelových výrobních linek. Hledané prvky vektoru y potom získáme úpravou výrazu (2.8) na tvar:

$$y = \ E - A \ \ x. \tag{2.16}$$

K problémům nedochází ani v případech, kdy při sestavování bilance vycházíme u skupiny hromadných výrobků z kapacit a v případě sériových výrobků pak z požadavků externích zákazníků. Pro takový případ potom stačí upravit model meziodvětvových vztahů následujícím způsobem:

a) V prvním kroku seřadíme jednotlivé výrobky ve vektorech x a y tak, že nejdříve budou řazeny výrobky hromadné a po nich výrobky sériové anebo naopak. Podobným způsobem pak budou prvé sloupce a řádky matice A obsazeny hromadnými výrobky a další sloupce a řádky potom výrobky sériovými.

b) Ve druhém kroku pak matici A rozdělíme na jednotlivé submatice a vektory x a y tak, že vytvoříme dělicí čáry mezi oběma skupinami výrobků:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Indexy 1 v maticích a vektorech označují výrobky, u nichž se při bilancích vychází z kapacity zařízení, a index 2 pak výrobky, u nichž jsou východiskem požadavky zákazníků.

c) V posledním kroku potom rozdělené vektory a matici z předchozího kroku dosadíme do rovnice (2.8) a získáme následující výraz:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Tento výraz je zápisem dvou maticových rovnic ve tvaru:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ x_2 &= y_2 + A_{21}x_1 + A_{22}x_2. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Jestliže vyřešíme soustavu (2.19) podle y_1 a x_2, získáme odpověď na to, kolik musíme celkem vyrobit výrobků druhé skupiny, abychom vyhověli požadavkům zákazníků, a také jaké množství budeme moci dodat zákazníkům požadujícím hromadně vyráběné výrobky:

$$\begin{aligned} x_2 &= \ E - A_{22} \ ^{-1} \ A_{21}x_1 + y_2 \ , \\ y_1 &= \ E - A_{11} \ x_1 - A_{12}x_2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Připustíme-li si, že matice A_{21} obsahuje měrné spotřeby výrobků, jež jsou vyráběny sériově na výrobky vyráběné v komunálních procesech, je zřejmé, že při praktických aplikacích je to často matice nulová. Důvodem je fakt, že lze jen obtížně takové návaznosti realizovat.

Bilanční model je pak nutné upravit v podmínkách, v případě že ve výrobní struktuře podniku existují takové druhy výrob, kdy v jednom procesu vzniká současně více než jeden výrobek.

Problém spočívá v tom, že jednotlivé sdružené výrobky jsou vyráběny ve výrobním procesu v nějakém jen obtížně ovlivnitelném poměru. Navíc není jisté, že ve stejném poměru je výrobce schopen je dále prodat zákazníkům nebo následně zpracovávat. Kdybychom všechny sdružené výrobky zařadili do bilančního modelu, vznikly by matematické problémy s jeho řešením. Součástí výpočtu a řešení bilančního modelu je totiž výpočet inverzní matice. Ten je však možný jen v případě, že bilanční rovnice jsou navzájem nezávislé.

Problém popsaný v předchozím odstavci je pak možné řešit například následujícím způsobem:

a) Zvolíme jeden ze sdružených výrobků a označíme jej za hlavní a ten pak zařadíme do bilančního modelu mezivýrobkových vztahů.

b) Pro tzv. vedlejší výrobky pak sestavíme dvě základní bilance. První z nich je určena k výpočtu jejich množství, které vznikne při plánované výrobě výrobků hlavních. Druhá bilance pak slouží pro bilanci jejich potřeby na ostatní výrobky v modelovaném podnikovém systému nebo pro krytí požadavků zákazníků.

Postup je potom modelován tak, že v matici B se vymezí pro každý vedlejší výrobek dva samostatné řádky:

a) První řádek obsahuje ve sloupci, jež přísluší hlavnímu výrobku, výtěžek vedlejšího výrobku na jednotkové množství výrobku hlavního.

b) Druhý z nich pak zahrnuje měrné spotřeby vedlejšího výrobku přepočtené na ostatní výrobky podniku.

Vektor s po výpočtu bilance obsahuje pro vedlejší výrobek dvě hodnoty, první z nich vyjadřuje celkovou produkci a druhá pak sumu celkových požadavků. Pokud se tyto hodnoty nerovnají, je nutné tento nesoulad řešit mimo bilanční model.

2.5. Řešení podnikového bilančního modelu v prostředí MS Excel

Všechny výpočetní operace, které jsou nutné pro řešení podnikového bilančního modelu, lze relativně jednoduše a především efektivně realizovat v prostředí tabulkových procesorů. Pro jejich přehlednost a vybavení potřebnými funkcemi jsou využívány i podniky, které se vyznačují často velmi složitými strukturami materiálových toků. Následující řešený příklad ilustruje využití tabulkového procesoru MS Excel verze 2010.

Řešený příklad 2.1:

Cukrárna DIANA v Opavě se zabývá výrobou zákusků. Protože se blíží období Vánoc, objednávky na zákusky se zvyšují. Podnik potřebuje zjistit, jaké množství surovin bude potřebovat na uspokojení veškerých požadavků zákazníků. Také se musí ověřit, zda je možné vyhovět všem zákazníkům. Aby mohl být splněn tento požadavek, musí podnik znát požadavky zákazníků, množství suroviny a čas potřebný pro výrobu zákusků. Pro určení množství surovin využije cukrárna podnikové bilanční modely. Konkrétně se jedná o výpočet celkové produkce v podniku, bilančního modelu materiálových vstupů a bilančního modelu kapacit.

Jak bylo uvedeno v předchozích podkapitolách, podnikový bilanční model tvoří soustava lineárních rovnic a jeho cílem je nalézt hodnoty požadovaných veličin ze zadaných parametrů. Prvky bilančního modelu jsou jednotlivé výrobky, polotovary a suroviny. I přesto, že firma má svou stávající produkci, přemýšlí, zda může přijmout objednávky od zákazníků na vánoční cukroví. Při stávajícím vytížení strojů má firma k dispozici celkem 40 hodin práce týdně na každém stroji.

Cukrárna vyrábí tyto následující produkty:

- špičky, věnečky, vanilkové rohlíčky, pařížské rohlíčky a kokosky.

Složení jednotlivých produktů je následující:

a) Na výrobu 100 kusů věnečků je potřeba 1900 ml mléka, 563 g másla, 400 g hladké mouky, 10 ks vajec, 125 ml rumu, 250 g cukru a 1 g vanilkového cukru.

b) Na výrobu 100 kusů špiček se spotřebuje 46 g másla, 91 g hladké mouky, 320 g cukru, 280 g čokolády a 50 g vanilkového cukru.

c) Na výrobu 100 kusů vanilkových rohlíčku je potřeba 250 g másla, 375 g hladké mouky, 88 g cukru a 1250 g ořechů.

d) Výroba 100 kusů pařížských rohlíčků vyžaduje 140 ml mléka, 278 g másla, 12 g hladké mouky, 5 ks vajec, 395 g cukru, 150 g čokolády a 167 g ořechů.

e) Na 100 kusů kokosek je potřeba 10 ks vajec, 500 g cukru a 667 g kokosu.

Označení surovin, které cukrárna používá, je následující:

mléko (v ml) = surovina S1

máslo (v g) = surovina S2

hladká mouka (v g) = surovina S3

vejce (ks) = surovina S4

rum (v ml) = surovina S5

cukr (v g) = surovina S6

čokoláda (v g) = surovina S7

ořechy (v g) = surovina S8

vanilkový cukr (v g) = surovina S9

kokos (v g) = surovina S10

Množství surovin potřebných na výrobu 100 kusů jednotlivých zákusků v prostředí MS Excel je uvedeno na Obrázku 2.1.

Množství surovin potřebných na 100 kusů jednotlivých výrobků

	mléko (ml)	máslo (g)	hladká mouka (g)	vejce (ks)	rum (dcl)	cukr (g)	čokoláda (g)	ořechy (g)	vanilkový cukr (g)	kokos (g)
věnečky	1900	563	400	10	1,25	250	0	0	1	0
špičky	0	46	91	0	0	320	280	0	50	0
vanilkové rohlíčky	0	250	375	0	0	88	0	1250	1	0
pařížské rohlíčky	140	278	12	5	0	395	150	167	0	0
kokosky	0	0	0	10	0	500	0	0	0	667

Obrázek 2.1: Množství surovin na 100 ks zákusků

Na Obrázku 2.2 je uvedeno množství času v minutách potřebné k výrobě 100 ks jednotlivých produktů.

Čas potřebný k výrobě na jednotlivých zařízení na 100 ks v minutách:

	Stroj 1	Stroj 2	Stroj 3	Stroj 4	Stroj 5	Celkem
věnečky	0	15	50	20	30	115
špičky	10	20	45	60	35	170
vanilkové rohlíčky	20	0	30	0	25	75
pařížské rohlíčky	15	15	30	10	35	105
kokosky	0	20	20	0	20	60
Celkem	45	70	175	90	145	-

Obrázek 2.2: Čas v minutách potřebný k výrobě 100 ks zákusků

Výroba 100 kusů věnečků trvá celkem 115 minut, špičky 170 minut, vanilkové rohlíčky 75 minut, pařížské rohlíčky 105 minut a kokosky 60 minut. Nejvíce je vytížený stroj č. 3, celkem na 175 minut. Naopak nejméně stroj č. 1, a to na 45 minut.

Požadavky zákazníků v posledním týdnu před Vánoci jsou uvedeny na Obrázku 2.3.

Plán výroby

Název výrobku	Počet kusů
věnečky	1000
špičky	1500
vanilkové rohlíčky	800
pařížské rohlíčky	1000
kokosky	2000

Obrázek 2.3: Požadavky zákazníků v posledním týdnu před Vánoci

Nyní si definujeme proměnné, se kterými budeme v našem příkladu pracovat:

y_j = produkce j-tého výrobku (polotovaru) určeného ke spotřebě mimo bilancovaný systém, především tedy jde o požadavky zákazníků,

x_j = celková produkce j-tého výrobku bez ohledu na jeho další určení,

x_{ij} = spotřeba i-tého výrobku na výrobu x_j jednotek j-tého výrobku,

s_i = hledané množství potřebné pro splnění požadavků zákazníků,

a_{ij} = specifické spotřeby i-tého polotovaru,

s_{ij} = specifické spotřeby materiálových vstupů na jednotkové množství j-tého výrobku.

V dalším kroku provedeme matematickou formulaci podnikového bilančního modelu cukrárny. Začneme modelem mezivýrobkových vztahů, následovat bude model materiálových vstupů a nakonec model kapacit, viz rovnice (2.15).

Pro náš konkrétní bilanční model tedy sestavíme soustavu rovnic.

Celková produkce je v případě cukrárny následující:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= y_2, \\ x_3 &= y_3, \\ x_4 &= y_4, \\ x_5 &= y_5. \end{aligned} \tag{2.21}$$

V rovnici (2.21) se vyskytují pouze požadavky zákazníků y, protože jednotlivé výrobky nejsou polotovarem pro další výrobu. Samotné výrobky jsou vyráběny pouze ze surovin, nikoliv z polotovarů. Můžeme tedy za pravé strany rovnice požadavky zákazníků dle zadání.

$$\begin{aligned} x_1 &= 1000, \\ x_2 &= 1500, \\ x_3 &= 800, \\ x_4 &= 1000, \\ x_5 &= 2000. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Bilanční model materiálových vstupů má pak podobu soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1900x_1 + 140x_4, \\ s_2 &= 563x_1 + 46x_2 + 250x_3 + 278x_4, \\ s_3 &= 400x_1 + 91x_2 + 75x_3 + 12x_4, \\ s_4 &= 10x_1 + 5x_4 + 10x_5, \\ s_5 &= 1,25x_1, \\ s_6 &= 250x_1 + 320x_2 + 88x_3 + 395x_4 + 500x_5, \\ s_7 &= 280x_2 150x_4, \\ s_8 &= 1250x_3 + 1767x_4, \\ s_9 &= x_1 + 50x_2 + x_3, \\ s_{10} &= 667x_5. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Výpočty v bilančním modelu materiálových vstupů jsou provedeny v programu MS Excel 2010 pomocí matematické funkce SOUČIN.MATIC. V prvním kroku přepíšeme údaje o potřebě množství surovin na jednotlivé produkty do matice *B*. V dalším kroku zapíšeme vektor *x*, jehož složkami je požadované množství výrobků. Jednotlivé složky jsou vydělené stem, a to z toho důvodu, že potřebné množství surovin je uvedeno na 100 kusů. Následně vypočteme vektor *s,* jehož složky udávají potřebné množství jednotlivých surovin. Vektor *s* se vypočítá jako součin matice *B* s vektorem *x*. Samotný výpočet je zobrazen na Obrázku 2.4.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Matice B					vektor x	vektor s
2	1900	0	0	140	0	10	20400
3	563	46	250	278	0	15	11100
4	400	91	375	12	0	8	8485
5	10	0	0	5	10	10	350
6	1,25	0	0	0	0	20	12,5
7	250	320	88	395	500		21954
8	0	280	0	150	0		5700
9	0	0	1250	167	0		11670
10	1	50	1	0	0		768
11	0	0	0	0	667		13340

=SOUČIN.MATIC(A2:E11;F2:F6)

Obrázek 2.4: Bilanční model materiálových vstupů

Bilanční model kapacit má opět podobu soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} f_1 &= 15x_2 + 50x_3 + 20x_4 + 30x_5, \\ f_2 &= 10x_1 + 20x_2 + 45x_3 + 60x_4 + 35x_5, \\ f_3 &= 20x_1 + 30x_3 + 25x_5, \\ f_4 &= 15x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 10x_4 + 35x_5, \\ f_5 &= 20x_1 + 20x_3 + 20x_5. \end{aligned} \tag{2.24}$$

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Matice C					vektor x	vektor f
3	0	15	50	20	30	10	1425
4	10	20	45	60	35	15	2060
5	20	0	30	0	25	8	940
6	15	15	30	10	35	10	1415
7	0	20	20	0	20	20	860

=SOUČIN.MATIC(A3:E7;F3:F7)

Obrázek 2.5: Bilanční model kapacit

V další fázi řešení se tedy budeme věnovat výpočtům v bilančním modelu kapacit. Údaje o času potřebném k výrobě na jednotlivých zařízeních zapíšeme v podobě matice *C*. Matici *C* následně vynásobíme vektorem *x,* jehož složkami jsou požadovaná množství výrobků. Výsledný vektor *f* udává potřebné množství času k výrobě produktů na jednotlivých zařízeních v sekundách. Bilanční model kapacit je zachycen na Obrázku 2.5.

Po výpočtech vyšly následující výsledky:

a) Spotřeba surovin:

- mléka 20,4 litrů

- másla 11,1 kg

- hladké mouky 8,485 kg

- vajec 350 ks

- rumu 12,5 ml

- cukru 21, 954 kg

- čokolády 5,7 kg

- ořechů 11,67 kg

- vanilkového cukru 0,768 kg

- kokosu 13,34 kg

b) Stroje jsou vytíženy takto:

- stroj 1 je vytížen 23,75 hodiny

- stroj 2 je vytížen 34,33 hodiny

- stroj 3 je vytížen 15,67 hodiny

- stroj 4 je vytížen 23,58 hodiny

- stroj 5 je vytížen 14,33 hodiny

Firma ke své obvyklé produkci může přidat i objednávky na další zákusky, protože kapacita strojů není plně vyčerpána. Nejvíce je vytížen stroj 2, ale i na něm jsou dostatečné rezervy.

Shrnutí:

Druhá kapitola byla věnována problematice podnikových bilančních modelů, pomocí nichž formalizujeme na podnikové i vnitropodnikové úrovni varianty základních materiálových, energetických nebo hodnotových vazeb mezi prvky modelovaného systému, jejichž realizace je podmínkou pro transformaci jeho vstupů na požadované výstupy. Kromě definování základních pojmů byly popsány všechny potřebné bilanční rovnice a vysvětlen také postup řešení. Kapitola je zakončena ilustrací řešení na konkrétním příkladu z podnikatelské praxe.

3. Úlohy lineárního programování

Klíčová slova: duální úloha, lineární programování, optimální řešení, přípustné řešení, Simplexová metoda

Lineární programování (LP) lze považovat za jednu z nejčastějších a také nejúspěšněji aplikovanou matematickou metodou v ekonomii. Hovoříme o sofistikovaných matematických metodách, k nimž je zapotřebí využívat počítače, nikoliv triviální matematické postupy, viz (Ivaničová, Z. a Brezina I., 1997) nebo (Jablonský, J., 2007).

Při studiu úloh lineárního programování nás budou zajímat především následující otázky:

a) Jaké vlastnosti úloh lineárního programování lze využít k výpočtům řešení, tj. optimálního řešeni úlohy lineárního programování?

b) Za jakých podmínek existuje přípustné řešení úlohy lineárního programování, resp. optimální řešení?

c) Jaká je struktura množiny všech přípustných řešení, resp. všech optimálních řešeni úlohy lineárního programování?

Komerční softwary jsou dnes schopny řešit úlohy lineárního programování se statisíci proměnných a omezujících podmínek. Nicméně výpočet relevantních řešení bez znalosti teorie lineárního programování je možné jen stěží dovést k úspěšnému konci. Totéž platí i pro řešení úloh lineárního programování v prostředí MS Excel, který budeme používat. Za nejčastější důvody obtíží při výpočtech lze považovat:

a) Chyby ve formulaci modelu. Software např. hlásí, že úloha nemá přípustné ani optimální řešení, i když modelovaný ekonomický systém reálně existuje. Příslušné řešení by mělo existovat.

b) Dále se lze setkat s chybami při zavádění dat do počítače. Častou chybou je např. fakt, že číslo je do počítače v Excelu vloženo ve formátu textu. Tato drobná chyba není na první pohled patrna a způsobuje, že počítač nic nevypočítá, ale ani nepodá informaci o typu chyby.

Vektorový tvar úlohy lineárního programování ve standardní formě lze napsat následovně:

$$c^T x \rightarrow MAX\,(MIN), \tag{3.1}$$

při omezeních:

$$
\begin{aligned}
Ax &= b, \\
x &\geq 0.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

3.1. Základní pojmy lineárního programování

V této podkapitole budou analyzovány vlastnosti úloh lineárního programování. Označme množinu všech přípustných řešení úlohy lineárního programování symbolem X, tj.

$$X = \quad x \in \quad x_1, x_2, ..., x_n \quad \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0 \tag{3.3}$$

a množinu všech optimálních řešení této úlohy, tj. množinu všech $x = \quad x_1, x_2, ..., x_n \quad \in X \subset R^n$, kde účelová funkce nabývá svého globálního maxima (minima), symbolem X^*.

Každá úloha lineárního programování je z matematického pohledu zároveň úlohou konvexního programování, a proto platí, že každý bod lokálního maxima (minima) je zároveň bodem globálního maxima (minima). Jednoznačnost optimálního řešení však podle není zaručena, neboť lineární účelová funkce (3.1) není ani ryze konvexní ani ryze konkávní.

Každý vektor $x = \quad x_1, x_2, ..., x_n$ splňující omezující podmínky je přípustným řešením úlohy lineárního programování.

Sloupce matice A lze označit $a^1, a^2, ..., a^n$, takže matici A typu $m \; x \; n$ lze zapsat takto:

$$A = \quad a^1, a^2, ..., a^n \; , \; . \tag{3.4}$$

Podle pravidel maticového počtu je možné zapsat soustavu rovností:

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + ... + x_n a^n = b. \tag{3.5}$$

Definice 3.1: Nechť všechny řádky v matici A typu $m \; x \; n$ z (3.4) jsou lineárně nezávislé. Řešení soustavy (3.2) mající nejvýše m kladných složek, které jsou koeficienty u lineárně nezávislých vektorů v kombinaci (3.5), se nazývá základní řešení neboli bazické řešení soustavy (3.2). Základní řešeni, které má pravě m kladných složek, se nazývá nedegenerované. Je-li kladných složek v (3.5) méně než m, nazývá se toto řešení degenerované.

Pozn. Soustava vektorů je lineárně nezávislá, jestliže žádný z vektorů není lineární kombinaci ostatních vektorů. Dále platí, že mezi m-člennými vektory může byt nejvýše m lineárně nezávislých vektorů. Jinak řečeno, pokud má soustava více než m vektorů, pak je lineárně závislá.

Pro nalezení optimálního řešení úlohy lineárního programování má zásadní význam věta 3.1:

Věta 3.1: Má-li úloha lineárního programování (3.1) – (3.2) optimální řešení, je mezi optimálními řešeními také základní řešení soustavy omezujících podmínek (3.2).

Soustava omezujících podmínek (3.2) má nejvýše $C(n,m) = n!/(n-m)!m!$ základních řešení. Tolika způsoby je totiž možné mezi n proměnnými $x_1, x_2, ..., x_n$ vybrat m možností na kladné složky v základním řešení. V reálných případech je ovšem základních řešení podstatně méně, než udává výše uvedené kombinační číslo $C(n,m)$, protože ne každý výběr možností na kladné složky, představuje základní řešení.

Věta 3.1 umožňuje omezit se při hledání optimálního řešení úlohy lineárního programování pouze na základní řešení, kterých je konečný počet, zatímco přípustných řešení je obecně nekonečně mnoho. Ve speciálních případech může byt množina přípustných řešení také prázdná, nebo v případě kdy $m = n$ může obsahovat jediný bod. V geometrickém znázornění je množina přípustných řešení průnikem poloprostorů vymezených nadrovinami omezujících podmínek. Jedná se tedy o konvexní geometricky útvar nazývaný polytop. V případě, že jde o omezenou množinu, polytop se nazývá polyedr. Speciálním případem polyedru v rovině R^2 je pak konvexní mnohoúhelník. Následující věta 3.2 charakterizuje množinu všech přípustných řešení v úloze lineárního programování.

Věta 3.2: Jestliže je množina přípustných řešení X úlohy lineárního programování (3.1) – (3.2) omezená, potom X je množina všech konvexních kombinaci utvořených ze všech základních řešeni. Je tedy konvexním polyedrem.

Řešený příklad:

Uvažujme následující úlohu lineárního programování:

$$12x_1 + 6x_2 \to MAX,$$

při omezeních:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad &= 40, \\ 4x_1 + 8x_2 + \quad 2x_4 &= 44, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nalezněte všechna základní řešení této úlohy.

Matice A je typu (2 x 4), úlohu lineárního programování můžeme zapsat maticově takto:

$$(12, 6, 0, 0)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to MAX, \tag{3.6}$$

při existenci omezení:

$$\begin{bmatrix} 8, 4, 2, 0 \\ 4, 6, 0, 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 44 \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Ze sloupců matice A pak lze sestavit $C(4, 2)=6$ dvojic sloupců, proto tedy existuje 6 potenciálních základních řešení, z nichž jsou 4 základní:

$$x^{1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x^{2} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}, x^{3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix}, x^{4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \\ 44 \end{bmatrix}.$$

Odpovídající hodnoty účelové funkce jsou:

$$c^T x(1) = 120, c^T x(2) = 120, c^T x(3) = 66, c^T x(4) = 0.$$

3.2. Formulace úloh lineárního programování

Jedním z nejdůležitějších kroků při aplikaci metod lineárního programování je formulace matematického modelu problému a následně také formulace ekonomického modelu řešeného problému. Předpokládejme, že je definován a verbálně popsán ekonomický model řešeného problému. Každý takovýto ekonomický model by měl obsahovat definici procesů, které v daném systému probíhají, a také definici činitelů, jež omezují realizaci jednotlivých procesů a rovněž definici cíle optimalizace, viz (Pelikán, J., 2001).

Proces transformace informací, které jsou součástí ekonomického modelu, do modelu matematického nemusí být vždy snadný. Abychom jej usnadnili, je vhodné definovat jeho základní kroky:

1. Identifikace rozhodovacích proměnných X_j.

Prvním předpokladem pro úspěšné sestavení matematického modelu je určení počtu rozhodovacích proměnných a stanovení jejich významu. Příslušné proměnné obvykle odpovídají jednotlivým procesům, které probíhají v daném zkoumaném systému. Pokud je procesem nějaká reálná aktivita, pak vyjadřuje příslušná proměnná intenzitu jejího provádění.

2. Definice optimalizačního kritéria.

Ve druhém kroku je nutné sestavit účelovou funkci, která je funkcí rozhodovacích proměnných.

3. Identifikace činitelů modelu.

Poslední krok při tvorbě matematického modelu spočívá v identifikaci činitelů modelu a jejich vyjádření ve formě tzv. omezujících podmínek. Musíme brát v úvahu všechny činitele. Protože výsledky, které by tento model poskytoval, by mohly být reálně nepoužitelné či nesmyslné. Identifikace činitelů modelu zahrnuje také určení vztahů mezi jednotlivými činiteli a procesy, a to ve formě strukturních koeficientů modelu, ale také určení pravých stran omezujících podmínek.

3.3. Základní typy úloh lineárního programování

V této podkapitole bude uveden přehled základních či typických úloh lineárního programování, viz (Hilier, F. S. a Lieberman, G. J., 2004). Řešené úlohy lze nalézt na následujícím odkazu: http://www1.osu.cz/studium/xmop1/priklady.htm. Budou rovněž uvedeny alternativy, co mohou představovat v těchto úlohách jednotlivé procesy, činitelé, ale také jaký tvar může mít optimalizační kritérium.

1. Úlohy výrobního plánování

Úlohy výrobního plánování obvykle spočívají v určení sortimentu výroby s tím, že je třeba respektovat omezující podmínky jak na straně vstupů, tak i na straně výstupů. Cílem optimalizační úlohy pak může být např. maximalizace dosaženého zisku nebo minimalizace vynaložených nákladů. Proměnné v takovýchto úlohách jsou obvykle představovány objemem produkce jednotlivých výrobků. Mohou ale také definovány jinak, např. jako doba provozu výrobního zařízení či stroje, po které se bude daný výrobek vyrábět.

2. Úlohy finančního plánování

Úlohy finančního plánování, někdy označované jako úlohy optimalizace portfolia patří mezi obvykle využívané typy finančních úloh. Cílem těchto úloh je určit objem investic do jednotlivých investičních variant, a to s cílem maximalizovat očekávaný výnos nebo minimalizovat riziko portfolia investičních příležitostí. Proměnné v tomto modelu představují objem investic. Omezující podmínky mohou pak odpovídat investiční strategii, která může limitovat investice do jednotlivých typů investičních variant.

3. Nutriční úloha

Nutriční úlohu lze formulovat například jako problém návrhu denní dávky výživy pro osobu. Do dávky výživy je možné zahrnout celou řadu složek, z nichž každá má specifické složení z hlediska sledovaných výživových látek (energie, minerály, bílkoviny, vitamíny atd.). Procesem je v této úloze pak otázka, zda a s jakou intenzitou se daná komponenta do návrhu výživy zahrne. Proměnné modelu budou tedy odpovídat jednotlivým komponentám. Jejich hodnoty představují množství dané komponenty použité v návrhu výživy. Omezující podmínky v této úloze zpravidla vyjadřují požadavky na dosažení maximální či minimální úrovně daných výživových komponent. Cílem úlohy pak může být např. minimalizace ceny denní dávky výživy.

4. Plánování reklamy

Relativně často používanými aplikacemi lineárního programování jsou aplikace marketingové. Jednou z takových typických úloh je rozložení rozpočtu na reklamu do jednotlivých médií. Procesem v úlohách tohoto typu je rozdělení reklamy do určitých médií, anebo v rámci konkrétního média do konkrétního času, dne v týdnu atd. Proměnné tedy jsou představovány např. počtem opakování reklamy v daném médiu. Omezující podmínky pak vycházejí z omezeného rozpočtu, z definice cílové skupiny, na kterou má být reklama primárně zaměřena atd. Cílem pak může být např. maximalizace vybraných mediálních charakteristik.

5. Směšovací úloha

Směšovací úloha je obecně úlohou vytvoření směsi požadovaných vlastností s tím, že pro vytvoření je možné použít předloženou nabídku komponent. Proměnné v úloze tohoto typu potom odpovídají použitým komponentám a jejich hodnoty pak objemu použitých komponent. Cílem úlohy může být např. minimalizace nákladů na vytvoření požadované směsi. Nutriční úloha, která je popsána v předchozím bodu, může být považována za speciální úlohu směšovací úlohy.

6. Úloha o dělení materiálu

Podstata úloh o dělení materiálu spočívá v dělení větších celků na menší části takovým způsobem, aby byl minimalizován odpad. Přitom je nutné respektovat požadavky na poměr, který mají mít vzniklé menší části, kolik těchto částí má maximálně či minimálně vzniknout atd. Každý větší celek lze na menší části rozřezat celou řadou způsobů. Úloha o dělení materiálu může být jednorozměrná, kdy dělení je charakterizováno pouze jedním rozměrem nebo dvourozměrná, kdy se z plochy vyřezávají menší díly. Jednorozměrná úloha vede na úlohu lineárního programování. Dvourozměrná úloha je pak výrazně složitější. Procesy odpovídají proměnné a hodnoty proměnných budou udávat, kolikrát se daný způsob dělení použije.

7. Distribuční úlohy

Významnou skupinu úloh lineárního programování tvoří tzv. distribuční úlohy. V těchto úlohách se jedná například o organizaci distribuce zboží mezi dodavateli a odběrateli. Tyto úlohy však mají v porovnání s předcházejícími typy úloh poněkud odlišnou strukturu.

3.4. Simplexová metoda

Simplexovou metodu je možné definovat jako výpočetní postup pro nalezení optimálního řešení úlohy lineárního programování, pokud ovšem takové řešení existuje, viz (Jablonský, J., 2007). Počátečním bodem tohoto výpočetního postupu je nalezeni výchozího základního řešení úlohy lineárního programovaní. V případě, že již je takové řešení k dispozici, simplexová metoda v jednotlivých krocích vypočítá nové základní řešení. Toto řešení má lepší nebo alespoň stejnou hodnotou účelové funkce v případě maximalizační úlohy. U úloh minimalizačních lze postupovat analogicky. Po provedení konečného počtu kroků vede tedy tento výpočetní postup k nalezení základního řešení, které odpovídá nejlepší hodnotě účelové funkce nebo k závěru, že takovéto řešení neexistuje. Při nalezeni základního řešení se musí podle základní věty lineárního programování jednat o řešení optimální, viz věta 3.1.

Výpočetní postup pomocí simplexové metody je možné rozdělit na dvě fáze:

a) nalezení výchozího základního řešeni,

b) iterační postup, který vede k optimalizaci účelové funkce.

V některých speciálních případech je nalezení výchozího základního řešení natolik snadné, že 1. fázi výpočtu ani není nutné provádět. V takovémto případě hovoříme o jednofázové simplexové metodě. Obecně nemusí být však nalezení výchozího základního řešeni úlohy lineárního programování snadné. Pak hovoříme o dvoufázové simplexové metodě.

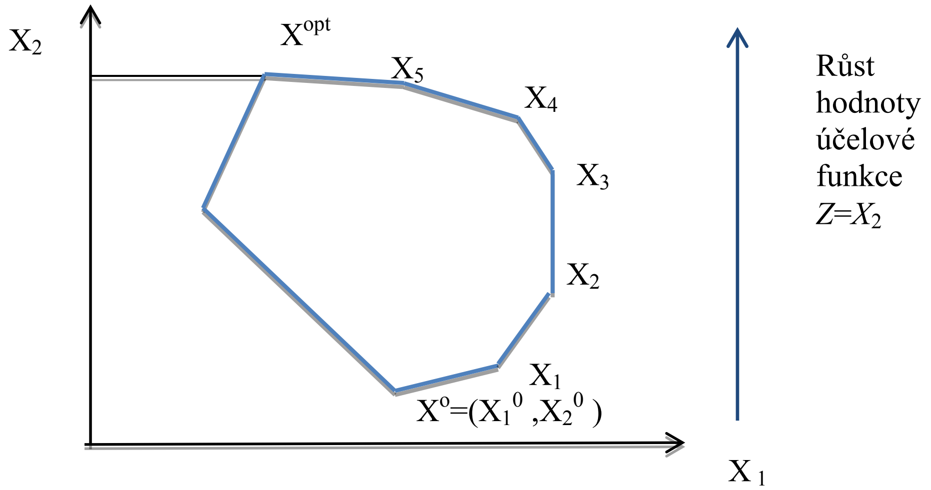
Základní myšlenka simplexové metody je znázorněna na obrázku 3.1, v němž je množina přípustných řešení D znázorněna konvexním mnohoúhelníkem v rovině R^2 . Jedná se o následující úlohu lineárního programování:

$$z = 0x_1 + 1x_2 \rightarrow MAX, \tag{3.8}$$

při existenci omezení:

$$x = x_1, x_2 \in D. \tag{3.9}$$

Jednotlivé vrcholy x^j mnohoúhelníku D pak představuji základní řešení úlohy lineárního programování.



Obrázek 3.1: Grafické znázornění základního řešení úlohy lineárního programování

Z předchozího textu vyplývá, že simplexová metoda nemusí vždy vést k nalezení optimálního řešení. Pokud totiž neexistuje přípustné řešení, znamená to, že zadané omezující podmínky jsou ve vzájemném rozporu. Tento fakt je důsledkem špatné specifikace modelu.

V případě, že základní přípustné řešení úlohy existuje, konči 1. fáze simplexové metody jeho nalezením a dále pokračujeme 2. fází. Jedná se tedy o přechod od základního řešení k takovému, které odpovídá nejlepší hodnotě účelové funkce, tj. k optimálnímu řešení. Ani takové optimální řešení nemusí existovat. Jedná se např. o případy, kdy je množina všech přípustných řešení neomezená nebo hodnota účelové funkce se zvyšuje nade všechny meze. Z praktického hlediska je tato situace důsledkem špatné specifikace modelu, nicméně obecně nastat může. 2. fáze simplexové metody tuto problém indikuje a výpočetní algoritmus se tak zastaví.

Při přechodu na nové bazické řešení ve 2. fázi simplexové metody se nemusí vždy zvyšovat případně snižovat hodnota účelové funkce. Její hodnota může zůstat stejná. K tomu dochází v situaci, kdy algoritmus narazí na tzv. degenerované základní řešení. Tato situace by však mohla vést k zacyklení výpočtu, kdybychom při nezvyšování účelové funkce po několika krocích dospěli ke stejnému základnímu řešení. Vlivem zaokrouhlovacích chyb v počítači k tomuto stavu v praxi nedochází.

Protože je tento text určen pro studenty oborů spíše ekonomického zaměření a jeho úkolem je uvést také praktické příklady, nepovažujeme za nezbytné vysvětlovat podrobný postup algoritmu simplexové metody. Studenty odkazujeme na bohatou literatura, nebo internetové zdroje jako je např. http://www1.osu.cz/studium/mopv2/simplex/. Důležité je porozumět hlavní myšlence simplexové metody, a také ukázat její aplikace na ekonomické problémy, a to včetně interpretace dosažených výsledků. K tomu by mělo sloužit zvládnutí řešení úloh lineárního programování pomoci nástroje Řešitel v prostředí MS Excel, viz poslední podkapitola této kapitoly.

3.5. Dvoufázová simplexová metoda

V tomto odstavci podrobněji popíšeme a na přikladu demonstrujeme postup dvoufázové simplexové metody.

1. Fáze:

Řešíme úlohu:

$$e^T x \to MIN, \tag{3.10}$$

kde $e^T = 1,1,\ldots,1$,

a to při omezeních:

$$\begin{aligned} &Ax + w = b, \\ &x \geq 0, w \geq 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

kde $w = w_1, w_2, \ldots, w_m$ jsou tzv. umělé proměnné.

Jestliže pro optimální řešení platí $e^T w = 0$, pak získáme přípustné základní řešení jiným způsobem. Jinými slovy, pokud pro optimální řešení platí $e^T w > 0$, pak přípustné řešení neexistuje a dvoufázová simplexová metoda končí.

2. Fáze:

V případě, že I. fáze výpočtu skončí nalezením výchozího přípustného základního řešení, řeší se v dalším kroku původní úloha:

$$e^T x \to MAX, \tag{3.12}$$

při omezeních:

$$\begin{aligned} &Ax = b, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Získáme optimální bazické řešení, nebo indikaci, že účelová funkce je na množině všech přípustných řešení shora neomezena. Jinými slovy optimální řešení úlohy neexistuje.

Řešený příklad:

Řešte následující úlohu lineárního programování pomocí dvoufázové simplexové metody.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow MAX, \tag{3.14}$$

při omezeních:

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 6, \\ &4x_1 + \quad\ + 2x_3 \leq 10, \\ &x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Řešení:

1. Fáze řešení:

$$w_1 + w_2 \rightarrow MIN, \tag{3.16}$$

při omezeních:

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + w_1 = 6, \\ &4x_1 + \quad\ + 2x_3 + \quad + w_2 = 10, \\ &x_i, w_j \geq 0,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Optimální základní řešení je výchozím přípustným základním řešením pro 2. fázi řešení úlohy: $x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 = 2,4; 0; 0,2; 0; 0$

2. Fáze řešení:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow MAX, \tag{3.18}$$

při omezeních:

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 6, \\ &4x_1 + \quad\ + 2x_3 \leq 10, \\ &x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Optimální základní řešení je následující: $x_1, x_2, x_3 = 2,5; 0,3; 0$.

3.6. Dualita jako vztah mezi dvěma úlohami lineárního programování

Ke každé úloze lineárního programování, označme ji jako úlohu primární, lze formulovat také úlohu duální. Vypočtené hodnoty těchto proměnných mají pro praxi velký význam. Zároveň na základě formulace duální úlohy byl vyvinut tzv. duální algoritmus, kterého lze použít při řešení některých modelů rozhodovacích situací, viz (Wagner, H. M., 1969).

Vektorový zápis primární úlohy lze zapsat následujícím způsobem:

$$c^T x \rightarrow MAX, \tag{3.20}$$

při omezeních:

$$Ax \leq b, x \geq 0. \tag{3.21}$$

Úlohu označujeme jako primární úlohu lineárního programování. Lagrangián k primární úloze je podle definice:

$$F(x, y) = c^T x + y^T (b - Ax). \tag{3.22}$$

Kuhn-Tuckerovy podmínky jsou pro tento Lagrangian následující:

$$\begin{aligned} \nabla_Y F(x, y) &= b - Ax \geq 0, x \geq 0 \Leftrightarrow Ax \leq b, x \geq 0. \\ \nabla_X F(x, y) &= c - A^T y \leq 0, y \geq 0 \Leftrightarrow A^T y \geq c, y \geq 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

První Kuhn-Tuckerova podmínka představuje omezující podmínky primární ulohy. Druhá Kuhn-Tuckerova podmínka definuje omezující podmínky jiné úlohy lineárního programování, kterou nazýváme duální úloha lineárního programování. Konkrétně jde o úlohu lineárního programování s vektorem proměnných $y \in R^m$:

$$b^T y \to MIN, \tag{3.24}$$

při omezeních:

$$A^T y \geq c, y \geq 0. \tag{3.25}$$

Dualitou se v úlohách lineárního programovaní rozumí přesně definovaný vzájemný vztah mezi dvojici úloh lineárního programování.

Důležitá je skutečnost, že dualita úloh (3.20), (3.21) a (3.24), (3.25) je vzájemně symetrickým vztahem obou úloh lineárního programování. Proto se v této souvislosti často používá pro dvojici uvedených úloh lineárního programování termín dvojice duálně sdružených úloh lineárního programování.

Formulace duální ulohy k úloze primární závisí na podobě primární ulohy. Záleží na tom, zda je primární úloha v maticovém tvaru z Tabulky 3.1 nebo tvaru obyčejném z Tabulky 3.2 či nikoliv Podle toho lze rozlišovat dva případy, a to souměrnou a nesouměrnou dualitu.

Souměrná dualita v podobě maticového zápisu:

Primární úloha	Duální úloha
Maximalizovat $z = c^T x$	Minimalizovat $f = b^T y$
$Ax \leq b$	$A^T y \geq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

Tabulka 3.1: Definice souměrné duality v podobě maticového zápisu

Souměrná dualita v podobě maticového zápisu:

Primární úloha	Duální úloha
Maximalizovat $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	Minimalizovat $f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, ..., m.$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,\ j = 1, 2, ..., n.$
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n.$	$y_i \geq 0, i = 1, 2, ..., m.$

Tabulka 3.2: Definice souměrné duality v podobě obyčejného zápisu

Z výše uvedených tabulek je zřejmě, že duální úloha má jiný vektor proměnných než úloha primární. Označili jsme jej *y* a jedna se o *m*-složkový vektor, tj. vektor, který má tolik složek, kolik měla primární úloha vlastních omezení.

Transformace primární ulohy na úlohu duální probíhá v následujících krocích:

1. Maximalizační úloha se změní na minimalizační, popř. naopak.

2. Ke každému vlastnímu omezení primární úlohy přiřadíme jednu duální proměnnou y_i, $i = 1, 2, ..., m$ a také podmínku $y_i \geq 0$.

3. Ke každé proměnné x_j, $j = 1, 2, ..., n$, primární úlohy přiřadíme vlastní omezení duální ulohy.

4. Matice strukturních koeficientů duální úlohy je rovna transponované matici těchto koeficientů primární úlohy.

5. Koeficienty pravé strany duální úlohy jsou shodné s koeficienty účelové funkce primární úlohy a naopak.

6. Význam nerovností vlastních omezení se u duální úlohy mění na opačný.

7. U souměrné duality byla v úloze s maximalizací účelové funkce všechna vlastní omezení ve tvaru nerovnic s významem nerovnosti „$\leq$“.

8. Pro všechny proměnné platily podmínky nezápornosti.

Příklad formulace duálně sdružené ulohy k primární úloze lineárního programování je uvedena v Tabulce 3.3.

Primární úloha	**Duální úloha**
Maximalizovat $z = 200x_1 + 300x_2$	Minimalizovat $f = 250y_1 + 90y_2 + 50y_3$
$0,8x_1 + 0,2x_2 \leq 250$ $0,4x_2 \leq 90$ $0,1x_1 + 0,1x_2 \leq 50$	$0,8y_1 + 0,1y_2 \geq 200$ $0,2y_1 + 0,4y_2 + 0,1y_3 \geq 300$
$x_1 \geq 0,$ $x_2 \geq 0.$	$y_1 \geq 0,$ $y_2 \geq 0,$ $y_3 \geq 0.$

Tabulka 3.3: Příklad duálně souměrné úlohy

Z Tabulky 3.3 vyplývá, že:

1. Primární úloha je úlohou maximalizační, proto duální úloha je úlohou minimalizační.

2. Primární úloha má celkem dvě proměnné x_1, x_2.

3. Protože primární úloha měla tři vlastní omezení, má duální úloha tři nezáporné proměnné y_1, y_2, y_3.

4. Každé podmínce nezápornosti primární ulohy odpovídá jedno vlastní omezení úlohy duální.

5. Znak nerovnosti ve vlastních omezeních se změnil z „$\geq$“ na „$\leq$“.

6. Cenové koeficienty z primární úlohy byly převedeny na pravé strany vlastních omezení duální ulohy a naopak. Pravé strany omezení primární úlohy se staly koeficienty účelové funkce úlohy duální.

Při formulování souměrné duality jsme uvažovali model lineárního programování pouze ve tvaru rovnic (3.20) a (3.21), viz Tabulka 3.1. V takové úloze s maximalizací účelové funkce byla všechna vlastní omezení ve tvaru nerovnic se znakem nerovnosti „$\leq$“ a pro všechny proměnné platily podmínky nezápornosti. V reálných úlohách lineárního programování se však vyskytují také jiná vlastní omezení než nerovnice uvedené v Tabulce 3.1 a všechny proměnné rovněž nemusí být v praxi nezáporné.

Pokud je v omezujících podmínkách nerovnice s opačným znakem nerovnosti, lze ji snadno vynásobením hodnotou „–1“ převést do požadovaného tvaru. Podívejme se nyní blíže na situaci, kdy se v primární úloze bude vyskytovat vlastní omezení ve tvaru rovnosti. Sestaveni duální ulohy budeme demonstrovat na přikladu, kdy ve vlastním omezení uvažujeme namísto nerovnosti „$\leq$“ rovnost „=“.

Řešený příklad:

V kožedělném závodě se vyrábějí tři druhy výrobků (peněženky, rukavice a brašny), na něž se spotřebovávají dva druhy surovin (kůží), jejichž disponibilní množství nelze zvýšit nad udanou mez. Naším úkolem je určit výrobní program pro maximální výši zisku. K primární úloze lineárního programování sestavte také úlohu duální. Vstupní údaje jsou uvedeny v Tabulce 3.4.

	A	B	C	D	E
1		Spotřeba kůže			Disponibilní množství
2		v m^2 na 1 ks výrobku			kůže v m^2
3		V1	V2	V3	
4	Kůže A	0,2	0	0,2	3000
5	Kůže B	0	0,25	0,3	4200
6	Zisk z 1 ks výrobku v EUR	12	11	26	

Tabulka 3.4: Zadání úlohy

Formulace primární úlohy:

$$12x_1 + 11x_2 + 26x_3 \to MAX,$$

za podmínek:

$$\begin{aligned} 0{,}2x_1 + \qquad\quad 0{,}2x_3 &\leq 3000, \\ 0{,}25x_2 + 0{,}3x_3 &\leq 4200, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Protože jde v přikladu o maximalizaci účelové funkce, je třeba, aby všechny omezující podmínky byly nerovnice se znakem nerovnosti „$\leq$“. Obě omezení tento požadavek splňuji. Nyní přistoupíme k formulaci úlohy duální. Obdržíme novou úlohu:

$$3000u_1 + 4200u_2 \to MIN,$$

za podmínek:

$$0,2u_1 \geq 12,$$

$$0,25u_2 \geq 11,$$

$$0,2u_1 + 0,3u_2 \geq 26,$$

$$u_1 \geq 0,$$

$$u_2 \geq 0.$$

U omezujících podmínek typu „≥“ a "=" je třeba pomocnou proměnnou k levé straně nerovnice případně rovnice přičíst. Pomocné proměnné budou v takto získané soustavě rovnic základními proměnnými.

Příklad řešíme standardně simplexovou metodou. Výsledky řešení primární úlohy jsou uvedeny v Tabulce 3.5.

Primární úloha:

V posledním řádku zvolíme to číslo, které je nejmenší, zvolené číslo udává náš klíčový sloupec.

Čísla v posledním sloupci dělíme čísly v klíčovém sloupci (nebereme v potaz záporná čísla). Nejmenší výsledek podílu udává klíčový řádek.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
x_4	1/5	0	1/5	1	0	3000	15000	
x_5	0	1/4	**3/10**	0	1	4200	14000	**1. iterace**
z	-12	-11	-26	0	0	0	xxx	
x_4	**1/5**	- 1/6	0	1	- 2/3	200	1000	
x_3	0	5/6	1	0	3 1/3	14000	xxx	**2. iterace**
z	-12	10 2/3	0	0	86 2/3	364000	xxx	
x_1	1	- 5/6	0	5	-3 1/3	1000		
x_3	0	5/6	1	0	3 1/3	14000		**3. iterace**
z	0	2/3	0	60	46 2/3	376000		

Končíme s výpočtem, protože v *z* jsou pouze kladná čísla.

Tabulka 3.5: Řešení primární úlohy

V části simplexové tabulky obsahující poslední iteraci výpočtu jedné ze sdružených úloh je i řešení duální úlohy. Postup je uveden v Tabulce 3.6.

Duální úloha:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	y_1	y_2	y_3		
y_1	1/5	0	-1	0	0	1	0	0	12	
y_2	0	1/4	0	-1	0	0	1	0	11	
y_3	1/5	3/10	0	0	-1	0	0	1	26	**1. iterace**
w	-3000	-4200	0	0	0	0	0	0	0	
w′	2/5	11/20	-1	-1	-1	0	0	0	49	
y_1	1/5	0	-1	0	0	1	0	0	12	
u_2	0	1	0	-4	0	0	4	0	44	
y_3	1/5	0	0	1 1/5	-1	0	-1 1/5	1	12 4/5	**2. iterace**
w	-3000	0	0	-16800	0	0	16800	0	184800	
w′	2/5	0	-1	1 1/5	-1	0	-2 1/5	0	24 4/5	
y_1	1/5	0	-1	0	0	1	0	0	12	
u_2	2/3	1	0	0	-3 1/3	0	0	3 1/3	86 2/3	
u_4	1/6	0	0	1	- 5/6	0	-1	5/6	10 2/3	**3. iterace**
w	-200	0	0	0	-14000	0	0	14000	364000	
w′	1/5	0	-1	0	0	0	-1	-1	12	
u_1	1	0	-5	0	0	5	0	0	60	
u_2	0	1	3 1/3	0	-3 1/3	-3 1/3	0	3 1/3	46 2/3	**4. iterace**
u_4	0	0	5/6	1	- 5/6	- 5/6	-1	5/6	2/3	
w	0	0	-1000	0	-14000	1000	0	14000	376000	

Tabulka 3.6: Řešení duální úlohy

Z Tabulky 3.5, přesněji z 3. iterace lze vyčíst také optimální řešení duální úlohy $u^T = 60{,}140/3$. Ta je v posledním řádku tabulky pod přídatnými proměnnými, jejichž koeficienty vytvořily jednotkovou matici 1. iterace. Hodnoty přídatných proměnných lze zjistit rovněž z posledního řádku tabulky 3. iterace. Jsou zapsány ve sloupcích původních strukturních proměnných $u_3 = 0$, $u_4 = 2/3$, $u_5 = 0$.

Ale také obráceně lze z tabulky řešení duální úlohy zjistit řešení úlohy primární. Tedy optimální řešení primární úlohy z Tabulky 3.6 je $x^T = 1000{,}0{,}1400{,}0{,}0$.

Účelová funkce z primární úlohy má hodnotu: $z = 12.1000 + 26.14000 = 376000.$

Hodnota účelové funkce z úlohy duální má pak hodnotu: $z = 3000.60 + 4200.140/3 = 376000.$

Strukturní duální proměnné můžeme interpretovat jako ocenění jedné jednotky kapacity ve vztahu k hodnotě účelové funkce. Jedná se tedy o marginální ocenění kapacit. Někdy se strukturní duální proměnné označují jako stínové ceny. Hodnoty duálních proměnných je třeba uvažovat pouze v rámci určitých intervalů stability pro hodnoty pravé strany *b*.

3.7. Vztah mezi primární a duální úlohou lineárního programování a ekonomická interpretace duality

Hlavní význam duality spočívá ve vzájemných vztazích, které platí mezi primární a duální úlohou. Je možné je formulovat ve formě šesti matematických vět:

Věta 3.3: Duální úloha k duální úloze lineárního programování je úloha primární.

Věta 3.4: Mají-li obě úlohy, jak primární tak duální, přípustné řešení, pak mají také řešení optimální.

Věta 3.5: Je-li x libovolným přípustným řešením primární úlohy a y libovolným přípustným řešením duální úlohy, pak platí $c^T x \leq b^T y$.

Věta 3.6: Platí-li $c^T x \leq b^T y$, pro přípustná řešení x a y, pak x je optimálním řešením primární úlohy a y je optimálním řešením duální úlohy.

Věta 3.7: Má-li jedna z úloh, ať primární či duální, přípustné řešení, ale nemá řešení optimální, pak druhá úloha nemá žádné přípustné řešení.

Věta 3.8: Má-li jedna z úloh optimální řešení, má jej také druha úloha, přičemž platí, že hodnoty účelových funkci jsou stejné.

Ekonomická interpretace řešení duálního modelu je velmi těsně spojena s interpretací modelu primárního. Všechny úvahy budeme demonstrovat na konkrétním přikladu výrobního plánovaní, která byla řešena v podkapitole 3.6 a zadána v Tabulce 3.4. Nejdříve si připomeňme jednotlivé prvky primárního modelu:

x_1 - množství kožedělného výrobku peněženka,

x_2 - množství kožedělného výrobku rukavice,

x_3 - množství kožedělného výrobku brašna,

z - celkový zisk = 376 000,

b_1 - disponibilní kapacita kůže A = 3000,

b_2 - disponibilní kapacita kůže B = 4200,

x^* - optimální výrobní program (vektor), $x^* = 1000, 0, 1400$.

Označme y^* optimální řešení duální ulohy. Z předchozího výpočtu jsme zjistili, že:

$y^* = 60, 140/3$.

Podle hlavní věty o dualitě platí:

$z = c^T x = b^T y$, tedy:

$z = 3000.60 + 4200.140/3 = 376000.$

Jinými slovy, celkový zisk z produkce lze vyjádřit také jako součin kapacit jednotlivých využívaných zdrojů a hodnot duálních proměnných. Duální proměnné je tedy možné interpretovat jako ocenění jednotky příslušného využívaného zdroje. Jde však pouze o takzvané marginální ocenění příslušných disponibilních kapacit. Jinak řečeno, jedná se tedy o nejvyšší cenu jednotky využitého zdroje, za kterou se ještě firmě vyplatí nakoupit příslušný zdroj, protože přírůstek účelové funkce, v našem případě zisku, je pak vyšší. Pokud je skutečná cena jednotky takového zdroje menší, než je hodnota marginálního ocenění, vyplatí se firmě rozšířit výrobu nákupem tohoto zdroje.

Hodnota duálního neboli též marginálního ocenění se obvykle nazývá stínová cena či anglicky *shadow price* nebo také náklady obětované příležitosti či anglicky *opportunity costs*. Z těchto důvodů má také nevyčerpaný zdroj nulovou hodnotu duální proměnné, protože jeho navýšení o jednotku nepřispěje ke zvýšení hodnoty zisku.

Například jednotka 1. zdroje (kůže A) se podílí na celkovém zisku hodnotou 60 EUR. Kdyby byla hodnota $y_2 = 0$ (ve skutečnosti má však hodnotu 140/3) znamenalo by to, že se 2. zdroj (kůže B) na zisku přímo nepodílí. Tento zdroj by nebyl využit, a tudíž jeho zvýšení o jednotku by nezpůsobilo zvýšení hodnoty účelové funkce.

Obecně lze znalost hodnot duálních proměnných využít při hledání odpovědí na otázky tohoto typu: „Jak se změní hodnota účelové funkce, v našem případě zisk, jestliže se kapacita kůže A zvýší o jednotku?“ Odpověď je následující: změní se právě o hodnotu příslušné duální proměnné, v našem případě o $y_1 = 60$. Kdyby byla teoreticky hodnota $y_2 = 0$, změna kapacit u tohoto zdroje (kůže B) by neměla na výsledný zisk žádný vliv. Nabízí se však otázka, že kdyby kapacita tohoto zdroje (kůže B) výrazně poklesla, stal by se pak tento zdroj nedostatkovým, a to by jistě mělo vliv na celkový dosažený zisk. Jinak řečeno, znamená to, že hodnoty duálních proměnných je nutné uvažovat pouze v rámci určitých intervalů stability pro kapacity jednotlivých zdrojů. Obecně lze říci pro hodnoty pravých stran vlastních omezení.

Podle hlavní věty o dualitě platí pro náš příklad:

$$z^* = c^T x^* = b^T y^*,$$

$$z^* = 3000.60 + 4200.140/3 = 376000.$$

Souhrnně lze konstatovat, že pokud je skutečná cena jedné jednotky zdroje menší, než je její cena stínová, vyplatí se rozšířit výrobu nákupem právě tohoto zdroje. Stínová cena pak představuje náklady obětované příležitosti. Přičemž nevyčerpaný zdroj má potom také nulovou hodnotu duální proměnné neboli nulovou stínovou cenu. Zvýšení tohoto zdroje o jednotku proto nezpůsobí zvýšení celkového dosaženého zisku.

3.8. Řešení optimalizačních úloh v prostředí MS Excel

Úlohy lineárního programování lze také řešit v prostředí nejrůznějších softwarových produktů. Lze využít jak tabulkové kalkulátory, např. MS Excel, ale také jiné typy produktů, které jsou speciálně zaměřeny na řešení úloh matematického programování jako je WinQSB či Xpress IVE. V neposlední řadě je možné využít programovou podporu CAS produktů, k nimž patří Maple, Mathlab či Mathematica.

V praxi se nejčastěji využívají tabulkové kalkulátory. Optimalizační moduly v tabulkových kalkulátorech, které naleznete ve všech obvykle používaných verzích, jsou v zásadě totožné. Z tohoto důvodu se zaměříme se na práci s nejpoužívanějším z nich, a to s nástrojem řešitel v prostředí tabulkového kalkulátoru MS Excel, který se v praxi využívá nejčastěji. Nástroj řešitel je určen pro řešení většiny standardních úloh matematického programování. S jeho pomocí je tedy možné řešit jak lineární, ale také nelineární optimalizační úlohy. V tomto textu se však zaměříme především na úlohy lineárního programovaní, které lze v prostředí MS Excel rozšířit o některé další možnosti.

Jednou z možností rozšíření je možnost řešení úloh s podmínkami celočiselnosti, kdy některé nebo všechny proměnné řešeného modelu mohou být definovány jako celočíselné proměnné. Možnosti řešení úloh větších rozměrů jsou v prostředí MS Excel poměrně výrazně ohraničené. Proměnných i omezujících podmínek může být v modelu matematického programování nejvýše několik stovek. Pro účely řešení úloh v tomto textu je to však plně dostačující. V praxi se však řeší úlohy lineárního i nelineárního programování o rozsahu několika milionů proměnných a také omezujících podmínek. K těmto účelům už samozřejmě MS Excel využít nelze. Je nutné použít specializovaný software.

Programový produkt MS Excel je v České republice rozšířen především v české verzi. V některých firmách je možné se setkat rovněž s verzí anglickou. Z těchto důvodů budeme v následujícím výkladu primárně uvažovat českou verzi a pro eventuální uživatele verze anglické budeme také uvádět současně anglické ekvivalenty používaných terminů. Pro ilustraci řešeni úlohy lineárního programování v prostředí tabulkového kalkulátoru MS Excel využijeme následující příklad úlohy lineárního programování, tzv. nutriční či vyživovací problém, viz kapitola 3.3.

Řešený příklad:

Denní dávka výživy pro skupinu dospívajících dětí ve věku 13-15 let na letním táboře by měla mít energetickou hodnotu v rozmezí od 15000 do 20000 kJ, a měla by obsahovat minimálně 80 g proteinů, 15 mg vápníku a 10000 jednotek vitamínu C. Pro zabezpečení uvedených požadavků máme k dispozici celkem osm základních druhů potravin. Přesné složení těchto potravin z hlediska používaných komponent, které je vždy uváděno na 100 g dané potraviny, a jejich cena v Kč za 100 g je uvedena v tabulce 3.7. V denní dávce výživy můžeme přitom spotřebovávat minimálně 100 g a maximálně 400 g každé potraviny.

Cílem naší úlohy je nalezení takové skladby výživy, která bude vždy v souladu s výše uvedenými požadavky a zároveň bude pokud možno nejlevnější. V matematickém modelu úlohy lineárního programování bude tedy celkem osm proměnných, které budou vyjadřovat množství jednotlivých potravin ve stovkách gramů v navržené denní dávce výživy dospívajících dětí. Každá z proměnných bude omezena zdola i shora. Víme, že maximální množství každé potraviny je 400 g a minimální množství je 100 g. Každé jednotlivé komponentě výživy bude přitom odpovídat jedna omezující podmínka, která zabezpečí naplnění požadavků ze zadání. Výjimkou je energetická hodnota, kde budou tyto podmínky dvě.

	Energetická hodnota kJ	Proteiny g	Vápník mg	Vitamín C mg	Cena Kč
Hovězí maso	1200	18,4	3,1	20	12
Máslo	3000	0,6	0,2	2500	11,2
Pečivo	1160	7,2	0,8	0	1,5
Brambory	300	1,6	0,6	40	0,7
Ovoce	240	0	0,5	60	1,8
Tavený sýr	1260	31,2	0,6	1100	10,6
Kuře	650	20,2	1,5	0	6,5
Ovocný jogurt	450	7	0,2	260	3,2

Tabulka 3.7: Vstupní údaje pro úlohu lineárního prohramování - nutriční problém

Matematický model úlohy lze zapsat ve tvaru:

$$12x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 0,7x_4 + 1,8x_5 + 10,6x_6 + 6,5x_7 + 3,2x_8 \rightarrow MIN$$

Za podmínek:

$$\begin{aligned}
&1200x_1 + 3000x_2 + 1160x_3 + 300x_4 + 240x_5 + 1260x_6 + 650x_7 + 450x_8 \geq 15000\\
&1200x_1 + 3000x_2 + 1160x_3 + 300x_4 + 240x_5 + 1260x_6 + 650x_7 + 450x_8 \leq 20000\\
&18,4x_1 + 0,6x_2 + 7,2x_3 + 1,6x_4 + \qquad 31,2x_6 + 20,2x_7 + 7,0x_8 \geq 80\\
&3,1x_1 + 0,2x_2 + 0,8x_3 + 0,6x_4 + 0,5x_5 + 0,6x_6 + 1,5x_7 + 0,2x_8 \qquad \geq 15\\
&20x_1 + 2500x_2 + \qquad 40x_4 + 60x_5 + 1100x_6 + \qquad 260x_8 \geq 10000\\
&1 \leq x_i \leq 4,\ kde \text{ i = 1,2,...,8.}
\end{aligned}$$

Při řešení konkrétní optimalizační úlohy matematického programování v MS Excel je nutné nejprve připravit vstupní data úlohy v tabulce. Uspořádání této tabulky může být v podstatě libovolné, je však nutné dodržet jistá pravidla, která optimalizační modul vyžaduje. V Tabulce 3.8 je uveden příklad, jak mohou být vstupní data výše uvedeného příkladu v tabulce Excelu rozvržena. Většina koeficientů v Tabulce 3.8 jsou přímo zadané numerické hodnoty. V naší úloze jde o koeficienty, které popisují složení jednotlivých potravin (blok B3:E10), jejich cena (F3:F10), minimální a maximální požadavky na jednotlivé komponenty (B13:E14) a také dolní a horní meze pro použití jednotlivých potravin (C18:C19). V matematickém modelu naší nutriční úlohy lineárního programování bylo definováno celkem osm proměnných. V tabulkovém procesoru jsou tyto proměnné označeny v bloku H3:H10 a každé z těchto proměnných je přiřazena počáteční hodnota 0.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Energetická	Proteiny g	Vápník	Vitamín C	Cena Kč		Denní dávka
2		hodnota kJ		mg	mg			x 100g
3	Hovězí maso	1200	18,4	3,1	20	12		0
4	Máslo	3000	0,6	0,2	2500	11,2		0
5	Pečivo	1160	7,2	0,8	0	1,5		0
6	Brambory	300	1,6	0,6	40	0,7		0
7	Ovoce	240	0	0,5	60	1,8		0
8	Tavený sýr	1260	31,2	0,6	1100	10,6		0
9	Kuře	650	20,2	1,5	0	6,5		0
10	Ovocný jogurt	450	7	0,2	260	3,2		0
11								
12	Poždavky							
13	min	15000	80	15	10000			Cena denní dávky v Kč
14	max	20000	xxx	xxx	xxx			
15	návrh	0	0	0	0			0
16								
17	Použití potravin ve 100 g							
18	min		1					
19	max		4					

Tabulka 3.8: Vstupní údaje pro úlohu lineárního prohramování – MS Excel

Aby bylo možné v prostředí tabulkového procesoru zapsat jednotlivé omezující podmínky, je nutné nejprve zapsat jejich levou stranu. Tu pak porovnáme s konstantami na pravé straně. První omezující podmínka našeho příkladu, tj. energetická hodnota:

$$1200x_1 + 3000x_2 + 1160x_3 + 300x_4 + 240x_5 + 1260x_6 + 650x_7 + 450x_8 \geq 15000$$

Na levé straně tohoto omezení je skalární součin vektoru strukturních koeficientů, jež vyjadřují energetickou hodnotu na 100 g jednotlivých potravin, a vektoru proměnných modelu. V tabulkovém procesoru v Tabulce 3.8 se jedná o skalární součin vektoru, který je umístěn v bloku B3:B10 s vektorem v bloku H3:H10. V prostředí MS Excel lze pro výpočet skalárního součinu využít matematickou funkci. V české verzi MS Excel se jedná o funkci SOUČIN.SKALARNI (a; b), v anglické verzi MS Excel je to pak funkce SUMPRODUCT(a, b), kde a, b jsou bloky obsahující vektory, pro které musíme vypočítat skalární součin. Pro výše uvedené omezení bude tedy levá strana omezující podmínky vyjádřena jako =SOUČIN. SKALÁRNÍ (B3:B10;H3:H10). Tento vzorec je v tabulkovém procesoru v Tabulce 3.8 umístěn v buňce B15. Podobně v buňkách C15, D15 a E15 jsou vypočítány skalární součiny vyjadřující levé strany zbývajících omezujících podmínek, tj. bilance proteinů, vápníku a vitaminu C. Vzorce, které jsou zapsány v buňkách B15, C15, D15 a E15, ukazuje přehledně následující Tabulka 3.10.

Omezující podmínka	buňka	vzorec
Energetická hodnota	B15	=SOUČIN.SKALÁRNÍ(B3:B10;H3:H10)
Proteiny	C15	=SOUČIN.SKALÁRNÍ(C3:C10;H3:H10)
Vápník	D15	=SOUČIN.SKALÁRNÍ(D3:D10;H3:H10)
Vitamín C	E15	=SOUČIN.SKALÁRNÍ(E3:E10;H3:H10)

Tabulka 3.9: Zápis omezujících podmínek v tabulkovém procesoru

Posledním krokem při přípravě vstupních dat v prostředí tabulkového procesoru je definice optimalizačního kritéria, tedy účelové funkce. Toto optimalizační kritérium je nutné zapsat také ve tvaru vzorce a umístit jej do některé z buněk. V našem případě je účelová funkce vyjádřena jako skalární součin vektoru cenových koeficientů, viz blok F3:F10, s vektorem proměnných, viz blok H3:H10. Tento součin lze zapsat pomoci funkce = SOUČIN. SKALÁRNÍ (F3:F10;H3:H10). V Tabulce 3.8 je tento vzorec umístěn v buňce H15.

Poté, co je ukončena příprava vstupních dat, je možné aktivovat vlastní optimalizační modul tabulkového procesoru MS Excel. V prostředí MS Excel je nutné zvolit v menu *Nástroje-Řešitel*, anglicky *Tools-Solver*. V případě, že se položka *Řešitel* v menu *Nástroje* automaticky nevyskytuje, pak je nutné aktivovat doplněk *Řešitel* z menu *Nástroje-Doplňky*. Ve verzi MS Excel 2010 se nástroj *Řešitel* doinstaluje tak, že po kliknuti tlačítka *Soubor* zvolíte položku *Možnosti*, poté vyberete *Doplňky* a nakonec zvolíte nabídku *Řešitel* kliknutím na tlačítko *Přejít* nikoli *OK*. *Řešitele* pak naleznete v hlavním menu v záložce *Data* a *Analýzy*.

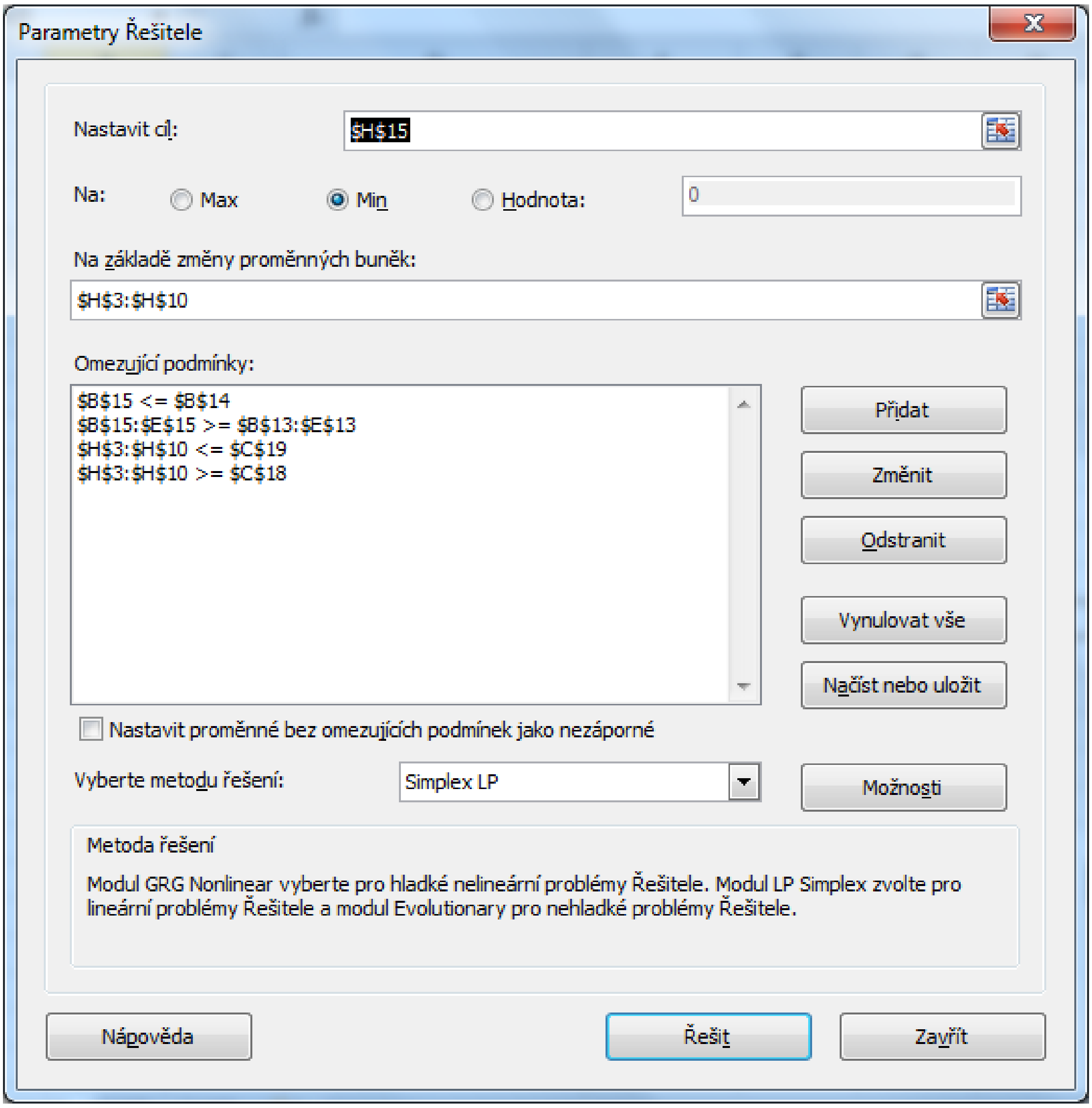
Po spuštění *Řešitele*, je třeba v dialogovém okně *Parametry řešitele*, které je uživateli zobrazeno, specifikovat všechny podstatné informace.

Ukázka dialogového okna pro náš příklad je na Obrázku 3.2. *Parametry Řešitele* musíme zadat v souladu s matematickou formulací modelu. Postup lze podrobně popsat následovně:

a) Kritérium optimality, tedy *Nastavit cíl*, anglicky *Set cell*. Jedná se o buňku obsahující vzorec, jejíž hodnota se bude optimalizovat. V naší úloze je optimalizační kritérium obsaženo v buňce H15.

b) Charakter kritéria optimality, tj. *Na*: Max, Min, Hodnota, anglicky *Equal to*: Max, Min, Value. Určujeme, zda se jedna o maximalizaci nebo minimalizaci účelové funkce anebo o řešení úlohy, ve které je cílem nalezení požadované úrovně kritéria. K dispozici jsou v MS Excel následující tři možnosti: maximalizace kritéria (Max), minimalizace kritéria (Min), což odpovídá naši úloze, nebo dosažení cílové hodnoty (Hodnota). Při této volbě je nutné dále zadat také cílovou hodnotu (Hodnota).

c) Oblast proměnných buněk modelu, tj. měněné buňky, anglicky *Changing cells*. Na Obrázku 3.2 se jedná o oblast H3:H10.



Obrázek 3.2: Parametry řešeitele – MS Excel verze 2010

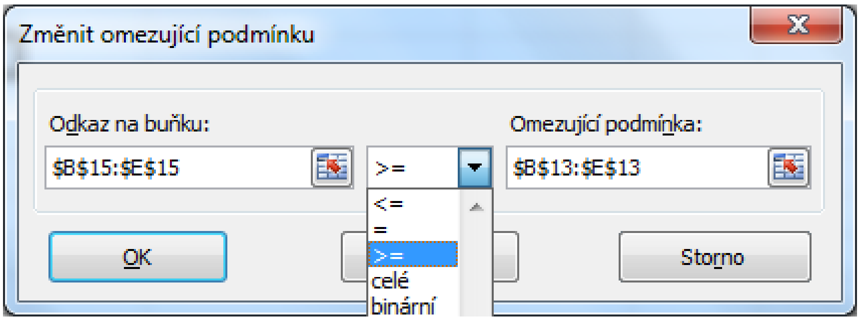
d) Omezující podmínky, anglicky *Subject to the constraints*.

Při zadání nové úlohy nebo úpravě již dříve zadaného omezení je nutné určit celkem tři položky:

1. Adresu buňky obsahující vzorec, anglicky *Cell reference*, jehož výsledek musí být menší, větší nebo roven stanovené omezující hodnotě; tento vzorec obsahuje obvykle proměnné modelu v podobě odkazů na buňky obsahující proměnné anebo se může jednat přímo o buňku, která obsahuje proměnnou. Na Obrázku 3.2 se konkrétně jedná o buňky v blocích B15:E15 a H3:H10, což je vlastně blok proměnných.

2. Typ omezení, což je jedna z možností „≤, =, ≥“, celé, tj. podmínka celočiselnosti nebo binární, tj. podmínka, že proměnné budou nabývat pouze hodnotu 0 nebo 1.
3. Omezující hodnotu, anglicky *Constraint*, jež může být reprezentovaná buňkou obsahující numerickou hodnotu nebo se může jednat o konstantu. Na Obrázku 3.2 jsou tyto hodnoty vloženy postupně do buňky B14, do bloku buněk B13:E13 a buněk C18 a C19.

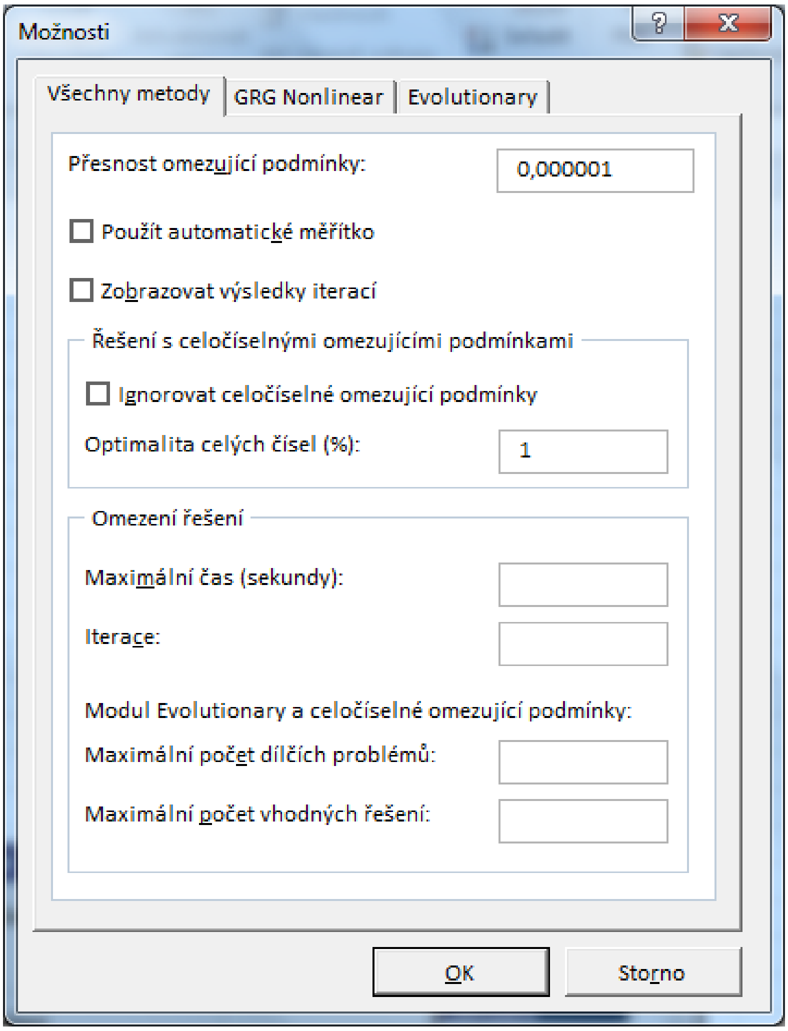
Dialogové okno, které se zobrazí při postupném přidávání nebo dodatečné úpravě omezujících podmínek, je zobrazeno na Obrázku 3.3.



Obrázek 3.3: Zadávání omezujících podmínek – MS Excel verze 2010

Omezující podmínky je možné definovat buďto samostatně, nebo jako blok. Pokud jsou definovaný jako blok, pak všechny buňky tohoto bloku musí splňovat jednu z relací „≤“, „≥“ nebo „=“. Při definici omezujících podmínek v bloku může byt pravá strana omezení zapsaná také jako blok buněk. V případě, že je na pravé straně stejná hodnota, např. 10, stačí vložit tuto jedinou hodnotu.

Pokud by bylo nutné doplnit soustavu omezujících podmínek o podmínky celočiselnosti pro všechny proměnné, stačí tuto soustavu rozšířit o omezení ve tvaru H3.H10 „celé“. Omezující podmínka se v tomto případě pochopitelně neuvádí. Při řešení konkrétní optimalizační úlohy je důležité nastavení určitých parametrů *Řešitele*. Toto nastaveni se provádí pomoci položky *Možnosti*, anglicky *Options*, která je součásti okna *Možnosti řešitele*. Po aktivaci této položky je zobrazeno dialogové okno *Možnosti řešitele*, viz Obrázek 3.4. Z uživatelského hlediska je důležité popsat pouze vybrané položky, které jsou uvedeny v tomto dialogovém okně.



Obrázek 3.4: Možnosti řešitele – MS Excel verze 2010

Ukázka dialogového okna je na Obrázku 3.4. Možnosti řešitele podrobněji popíšeme:

1. *Maximální čas* zpracování, anglicky *Max time*. Jedná se o hodnotu v sekundách, po jejímž uplynuti je výpočet úlohy přerušen. Standardně je nastaveno 100 sekund. Uživatel má pak možnost ve vypočtu dále pokračovat nebo jej definitivně ukončit. Maximální čas zpracování může byt nastaven až na 32767 vteřin, tedy cca 9 hodin.

2. *Iterace*, anglicky *Iterations*, je počet iterací, po jejímž uplynuti je vypočet přerušen a uživateli je nabídnuto řešení z poslední iterace. Standardně je nastaveno 100 iterací. Uživatel se poté může opět rozhodnout o pokračování výpočtu nebo jej ukončit. Limitní počet iterací lze nastavit až na hodnotu 32 767. U obou uvedených limitů je však třeba podotknout, že u většiny běžných úloh stačí standardně nastavené hodnoty, a není je tedy nutné nijak měnit.

3. *Přesnost omezující podmínky*, anglicky *Precision*, je konstanta, která udává přesnost, se kterou musí souhlasit levá a pravá strana omezující podmínky. A to tak,

aby byla považovaná tato podmínka za splněnou. Tato konstanta má význam především u nelineárních optimalizačních úloh. Takovými úlohami se však zabývat v tomto textu nebudeme. Standardně je tato konstanta nastavena na hodnotu 0,000001. Její zvýšení může tedy logicky vést ke zrychlení výpočtu, ale zároveň také ke snížení přesnosti výsledků.

4. Tolerance (tolerance) je procentní odchylka pro celočíselné řešeni. Zvýšení tolerance vede zpravidla ke snížení doby výpočtu celočíselného řešení. Toto snížení je však na úkor přesnosti. Pro úlohy, ve kterých nejsou definovaný podmínky celočiselnosti, nemá tato konstanta žádný význam.

Poznámka:

Ve verzi MS Excel 2007 obsahovalo dialogové okno *Možnosti řešitele* také další volby:

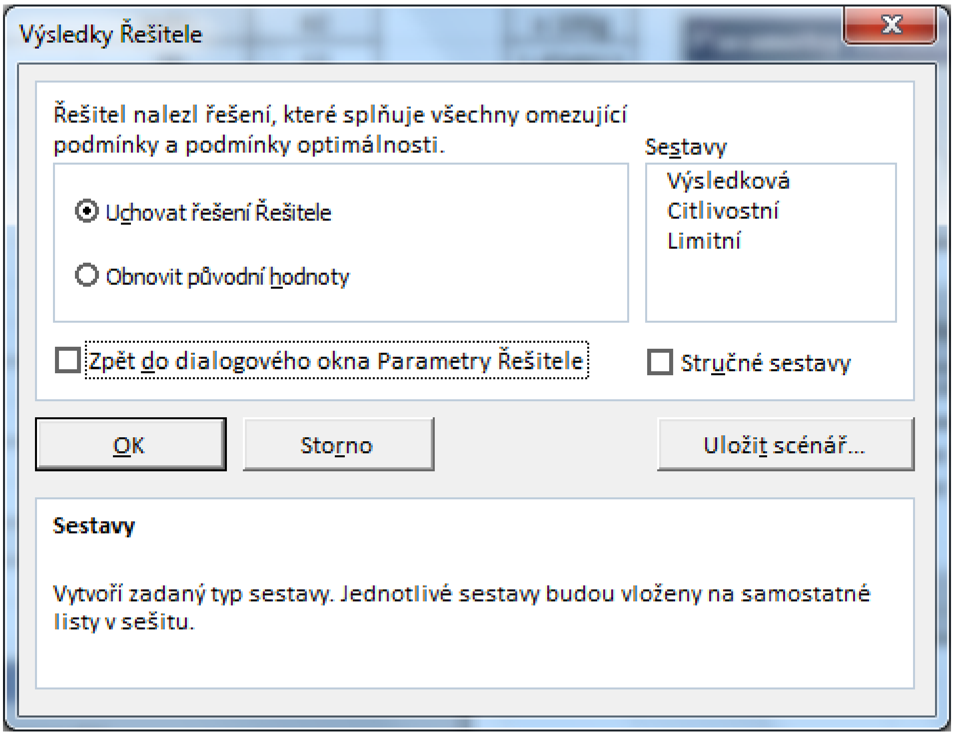
1. *Lineární model*, anglicky *Linear model*, je dvoupolohový přepínač, který je vhodné zapnout při řešení úloh lineárního programování. Standardně není tento přepínač zapnutý. Pokud je ponecháno standardní nastavení této volby, tedy nelineární model, potom to vede u lineárních úloh k výraznému prodloužení doby výpočtu a k jiné podobě výstupu výsledků, než bude uvedeno dále. Pro lineární úlohy používá totiž MS Excel k výpočtu standardní simplexovou metodu nebo také metodu větví a mezí pro řešení úloh lineárního programování s podmínkami celočiselnosti. Pro řešení nelineárních modelů je použit jiný iterační postup.

2. *Nezáporná čísla*, anglicky *Non-negative numbers*, je opět dvoupolohový přepínač. Jeho zapnutí má za následek, že jsou při výpočtu automaticky uvažovány podmínky nezápornosti. Tyto podmínky se pak ale už nezadávají mezi běžnými omezujícími podmínkami.

Při řešeni běžných úloh lineárního programovaní doporučujeme zapnout oba dva posledně zmíněné přepínače.

Poté, co definujeme všechny potřebné údaje v dialogovém okně *parametry řešitele*, a také v okně *Možnosti řešitele,* je možné spustit zpracování pomoci tlačítka *Řešit*, anglicky *Solve*. Doba trvání vlastního výpočtu závisí na rozsahu řešené úlohy, a také na tom, zda jsou či nejsou v modelu zahrnuty podmínky celočiselnosti, a rovněž na rychlosti počítače použitého pro zpracování. U běžných úloh lineárního programování, ve kterých bývá pouze několik málo proměnných a omezujících podmínek, máme obvykle výsledek zpracování k dispozici téměř okamžitě.

Po ukončení vypočtu je zobrazeno následující dialogové okno, viz Obrázek 3.5, ve kterém je informace, zda bylo či nebylo nalezeno optimální řešení, tedy řešení splňující všechny omezující podmínky. Uživatel má pak možnost zvolit, zda si přeje uchovat vypočtené řešení nebo vrátit původní hodnoty řešené úlohy. Obvykle se volí první možnost, pokud tedy optimální řešení nalezeno. Typickou volbou bude nejčastěji uchovat řešení. Pokud zvolíme tuto variantu, jsou pak optimální hodnoty proměnných umístěny do bloku proměnných a zároveň je také vypočtena optimální hodnota účelové funkce. Kromě této základní podoby výstupu je možné zvolit výstup v podobě podrobnějších informací. V dialogovém okně *Možnosti řešitele* se při zvolení varianty *Uchovat řešení řešitele* automaticky vygenerují do samostatného listu různé typy sestav.



Obrázek 3.5: Výsledky řešitele – MS Excel verze 2010

K dispozici jsou v prostředí MS Excel celkem tři druhy zpráv či sestav:

1. *Výsledková*, anglicky *Answer report*, obsahuje informace o původních a konečných hodnotách optimalizačního kritéria a proměnných modelu, ale také informace o vztahu levé a pravé strany omezujících podmínek. Pro všechny důležité prvky modelu, jako je kritérium optimality, definované proměnné a omezující podmínky, je uveden také odkaz na odpovídající buňky na listu v MS Excel.

2. *Citlivostní*, anglicky *Sensitivity report*, obsahuje intervaly stability pro cenové koeficienty. V české verzi programu MS Excel je termín cenový koeficient nevhodně přeložen jako tzv. úkolový koeficient. V první tabulce této zprávy, viz Obrázek 3.6, je pro každou proměnnou uveden její název, hodnota, redukovaný cenový koeficient, který odpovídá sníženým nákladům, cenový koeficient a interval stability pro tento koeficient. Interval stability je přitom definován povoleným nárůstem a poklesem. Jinými slovy, určuje, v jakém intervalu se může měnit cenový koeficient, aniž by se změnilo optimální řešení úlohy lineárního programování.

Druha tabulka citlivostní zprávy obsahuje pro každou omezující podmínku její název, hodnotu levé a pravé strany, stínovou cenu a interval stability pro hodnotu pravé strany, a to ve formě povoleného nárůstu a poklesu.

Microsoft Excel 14.0 Citlivostní sestava
List: [nutricni.xlsx]List1
Sestava vytvořena: 9.4.2013 12:41:06

Proměnné buňky

Buňka	Název	Konečná Hodnota	Snížené náklady	Cenový koeficient	Povolený nárůst	Povolený pokles
$H$3	Hovězí maso Denní dávka x 100g	1,65441345	0	12	1,918940984	2,466686059
$H$4	Máslo Denní dávka x 100g	3,282764692	0	11,2	7,387078435	15,91396055
$H$5	Pečivo Denní dávka x 100g	3,14345671	0	1,5	1,575238833	10,89605693
$H$6	Brambory Denní dávka x 100g	4	-1,72645115	0,7	1,72645115	1E+30
$H$7	Ovoce Denní dávka x 100g	4	-0,409076546	1,8	0,409076546	1E+30
$H$8	Tavený sýr Denní dávka x 100g	1	3,236017343	10,6	1E+30	3,236017343
$H$9	Kuře Denní dávka x 100g	1	0,882323589	6,5	1E+30	0,882323589
$H$10	Ovocný jogurt Denní dávka x 100g	1	1,475080201	3,2	1E+30	1,475080201

Omezující podmínky

Buňka	Název	Konečná Hodnota	Stínová cena	Pravá strana omezující podmínky	Povolený nárůst	Povolený pokles
$B$15	návrh Energetická hodnota kJ	20000	-0,00183946	20000	733,5089078	1835,569326
$B$15	návrh Energetická hodnota kJ	20000	0	15000	5000	1E+30
$C$15	návrh xxx	119,8437546	0	80	39,8437546	1E+30
$D$15	návrh xxx	15	4,542216916	15	4,836163265	1,496882759
$E$15	návrh xxx	10000	0,006323975	10000	1569,350993	627,1258278

Citlivostní sestava 1 List1 List2 List3
Připraven

Obrázek 3.6: Citlivostní zpráva – MS Excel verze 2010

3. *Limitní*, anglicky *Limit report*, znázorňuje, jak se mění hodnota optimalizačního kritéria při změně hodnot příslušných proměnných při zadaných mezích.

Na Obrázku 3.6 můžeme vidět podrobné výsledky optimalizace našeho příkladu.

Tyto výsledky je možné interpretovat následujícím způsobem:

a) v denní dávce bude 165 g hovězího masa, 328 g másla, 314 g pečiva, dále 400 g brambor a 400 g ovoce, po 100 g taveného sýru, ovocného jogurtu a kuřecího masa,

b) pokud by se cena potravin snížila/zvýšila, a to alespoň o hodnotu redukovaných cen, pak by bylo efektivní mít tyto potraviny v návrhu ve množství vyšším než minimálním případně nižším než maximálním. Konkrétně například: pokud by cena taveného sýru klesla z 10,60 Kč minimálně o 3,24 Kč, pak by byl tavený sýr v návrhu ve vyšším množství než je původní hodnota 100 g,

c) celková energie je v návrhu výživy na horní hranici, tj. 20 000 kJ, množství proteinů je překročeno téměř o 40 g, množství vápníku a vitaminu C jsou přesně na minimálně požadovaném množství,

d) můžeme se přesvědčit, že cena navržené denní dávky výživy je přibližně 91,50 Kč; požadavek například na zvýšení obsahu vápníku o 1 mg povede ke zvýšení celkové ceny o 4,54 Kč, což je stínová cena pro vápník; podobně v případě vitaminu C povede požadavek na zvýšení o 1000 jednotek ke zvýšení ceny celé denní dávky o 6,32 Kč atd.

Vlastnosti optimalizačního modulu *Řešitel* v prostředí MS Excel 2010 nejsou nijak mimořádné či zvláštní. Empirické zkušenosti však ukazuji, že je možné pomocí tohoto modulu řešit relativně spolehlivě i úlohy lineárního programování až při 200 proměnných a 200 omezeních. Nutnou podmínkou ale je, že model neobsahuje podmínky celočiselnosti. V úlohách s podmínkami celočiselnosti se doba výpočtu může značně prodloužit.

3.9. Maximalizace zisku při omezených výrobních zdrojích a omezeném odbytu

V této podkapitole se budeme věnovat typické úloze nalezení optimálního výrobního programu podniku. Budeme přitom brát v úvahu základní axiom podnikaní, a to dosažení maximální úrovně zisku.

Výrobní program podniku je obvykle je představován dvěma skupinami prvků:

a) seznam výrobků, kdy podnik vyrábí n výrobků (1,2,…, n.)

b) objem výroby jednotlivých výrobků v kusech $x_1, x_2, ..., x_n$. Předem neznámý objem výroby pak tvoří neznámý vektor $x = x_1, x_2, ..., x_n$.

Dále uvažujme následující veličiny:

a) c_i - zisk z výroby jednotky výrobku $i = 1, 2, ..., n,$
b) $c_i x_i$ - zisk z výroby x_i výrobku i,
c) $c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$ - celkový zisk výrobního programu podniku $x = x_1, x_2, ..., x_n$.
d) m – seznam omezených zdrojů pojmenovaných přirozenými čísly: 1, 2,…, m.
e) b - disponibilní množství těchto zdrojů v množstvích: $b_1, b_2, ..., b_m$. Eventuálně lze uvažovat volný nákup zdrojů z celkové omezené částky.

Pro danou technologii výroby uvažujeme:

a) a_{ij} - technologicky koeficient představující množství *i*-tého zdroje potřebného k výrobě jednotky *j*-tého výrobku,

b) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$ - množství *i*-tého zdroje potřebného k výrobě výrobního programu $X = \ x_1, x_2, ..., x_n\ $.

Dále uvažujeme:

a) h_i - horní omezení odbytu *i*-tého výrobku,

b) $0 \le x_j \le h_j$ - objem výroby *j*-tého výrobku nesmí překročit odbytové možnosti.

Je přirozené, že množina přípustných výrobních programů $X = \ x_1, x_2, ..., x_n$ splňuje následující podmínky $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i$, a také podmínky odbytových možností: $0 \le x_j \le h_j$, $j = 1, 2, ..., n.$

Za optimální výrobní program lze považovat takový přípustný výrobní program $X = \ x_1, x_2, ..., x_n\ $, který maximalizuje celkový zisk $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$.

Pro nalezení optimálního výrobního programu je nutné tedy shromáždit:

a) seznam výrobků podniku,

b) množství disponibilních zdrojů,

c) jednotkové zisky,

d) příslušná omezení odbytu,

e) technologické koeficienty.

V úloze lineárního programování hledáme maximální celkový zisk:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to MAX, \tag{3.26}$$

při omezeních:

$$\begin{aligned} &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \\ &i = 1, 2, ..., m, \\ &0 \le x_j \le h_j, \\ &j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Řešením této úlohy lineárního programování získáme optimální výrobní plán $X = x_1, x_2, ..., x_n$. Tento výrobní plán maximalizuje celkový zisk z výroby za existujících technologických a odbytových omezení. Takto zformulovanou úlohu maximalizace zisku při omezených výrobních zdrojích a omezeném odbytu si ukážeme na konkrétní úloze.

Řešený příklad:

Výrobce čajů Lipton, a.s. plánuje výrobu dvou směsí čajů Green Tea Orient a Green Tea Classic. Pro výrobu obou směsí mají přitom na toto období k dispozici od dodavatelů tři druhy čajů (označme je C1, C2 a C3) postupně v kapacitě 40, 60 a 25 kg. Ty se liší nejen kvalitou, ale také nákupní cenou.

Při výrobě obou směsí čajů Green Tea Orient a Green Tea Classic je třeba dodržovat přísné technologické postupy, které určují, jaké procento jednotlivých komponent bude použito při této výrobě. V následující Tabulce 3.10 je uvedena skladba obou směsí v kg komponenty na 1 kg směsi.

Na základě přímých a nepřímých nákladů, které souvisejí s výrobou, a rovněž vzhledem k předpokládané ceně obou čajových směsí byl kalkulován zisk, který činí 2000 Kč resp. 1400 Kč na jeden kilogram směsi Green Tea Orient, respektive Green Tea Classic.

Vedení firmy Lipton, a.s. chce samozřejmě naplánovat produkci firmy tak, aby byl její celkový zisk maximální.

Komponenty	Směs		Kapacita
	Orient	Classic	(kilogramy)
C1	0,5	0,25	40
C2	0,5	0,5	60
C2	0	0,25	25

Tabulka 3.10: Vstupní matice výroby čaje

V prvním kroku řešení úlohy převedeme ekonomický model na model matematický.

Při výrobě se jedná o dva procesy:

a) 1. výroba Green Tea Orient v množství $x_1 \geq 0$,

b) 2. výroba Green Tea Classic v množství $x_2 \geq 0$.

K dispozici máme celkem 3 druhy čajů neboli komponenty:

a) čaj 1,

b) čaj 2,

c) čaj 3.

Efektivnost výrobních procesů je definována následovně:

a) 1 kilogram směsi Green Tea Orient přináší zisk 2 000 Kč,

b) 1 kilogram směsi Green Tea Classic přináší zisk 1 400 Kč,

c) $z = 2000x_1 + 1400x_2$, představuje zisk produkce x_1 kilogramů Green Tea Orient a zároveň x_2 kilogramů směsi Green Tea Classic.

Matematický model naší úlohy lineárního programování obsahuje celkem 2 procesy a 3 zdroje:

$$z = 2000x_1 + 1400x_2 \to MAX$$

za podmínek:

$$\begin{aligned} 0,5x_1 + 0,25x_2 &\leq 40, \\ 0,5x_1 + 0,5x_2 &\leq 60, \\ 0,25x_2 &\leq 25. \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Strukturní neboli také technologické koeficienty jsou koeficienty na levých stranách nerovnosti. Koeficienty kapacitní jsou pak představovány koeficienty pravých stran nerovností. Naším cílem nalezení optimálního řešeni úlohy, tj. hledáme takové x_1 a x_2, které přinesou firmě Lipton, a. s. maximální zisk,

Pro nalezení optimálního řešení bychom použili nástroj Řešitel v prostředí MS Excel 2010. Výpočetní postup řešení bude demonstrován v následujících tabulkách. V Tabulce 3.11 je uveden zápis matematického modelu v prostředí spreadsheetu MS Excel 2010.

	A	B	C	D	E	F
1	a11	a12	b1	b1	x1	
2	a21	a22	b2	b2	x2	
3	a31	a32	b3	b3		
4	c1	c2	z			
5	0,5	0,25	40	0,75	1	
6	0,5	0,5	60	1	1	
7	0	0,25	25	0,25		
8	2	1,4	3,4		Počáteční řešení	

Tabulka 3.11: Matematický model úlohy v prostředí MS Excel 2010

V následující Tabulce 3.12 jsou pak prostřednictvím popisků zobrazeny vzorce, které je nutné zadat proto, abychom v dalších krocích nalezli optimální řešení.

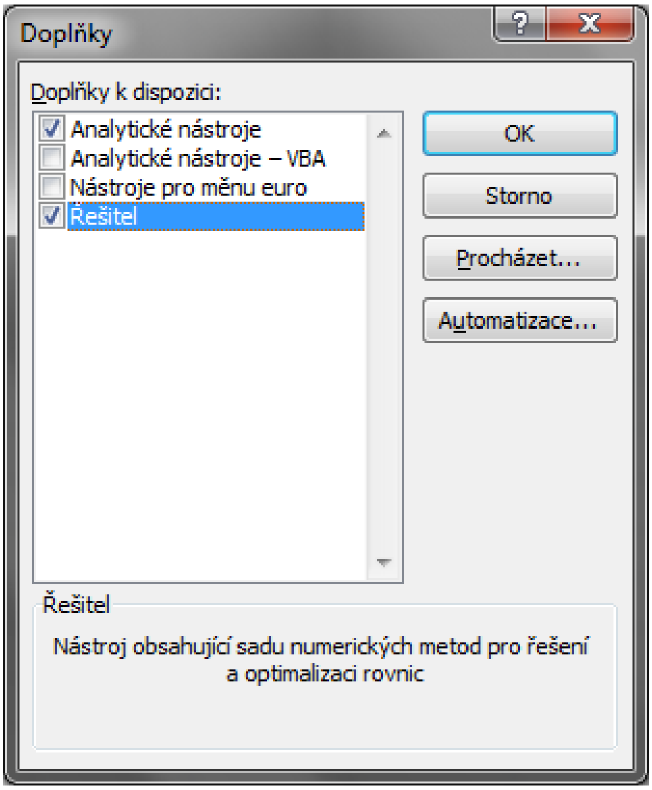
	A	B	C	D	E
1	a11	a12	b1	b1	x1
2	a21	a22	b2	b2	x2
3	a31	a32	b3	b3	
4	c1	c2	z		
5	0,5	0,25	40	0,75	1
6	0,5	0,5	60	1	1
7	0	0,25	25	0,25	
8	2	1,4	3,4		
9					
10					
11					

=SOUCIN.MATIC (A8:B8;E5:E6)

=SOUCIN.MATIC (A5:B7;E5:E6)

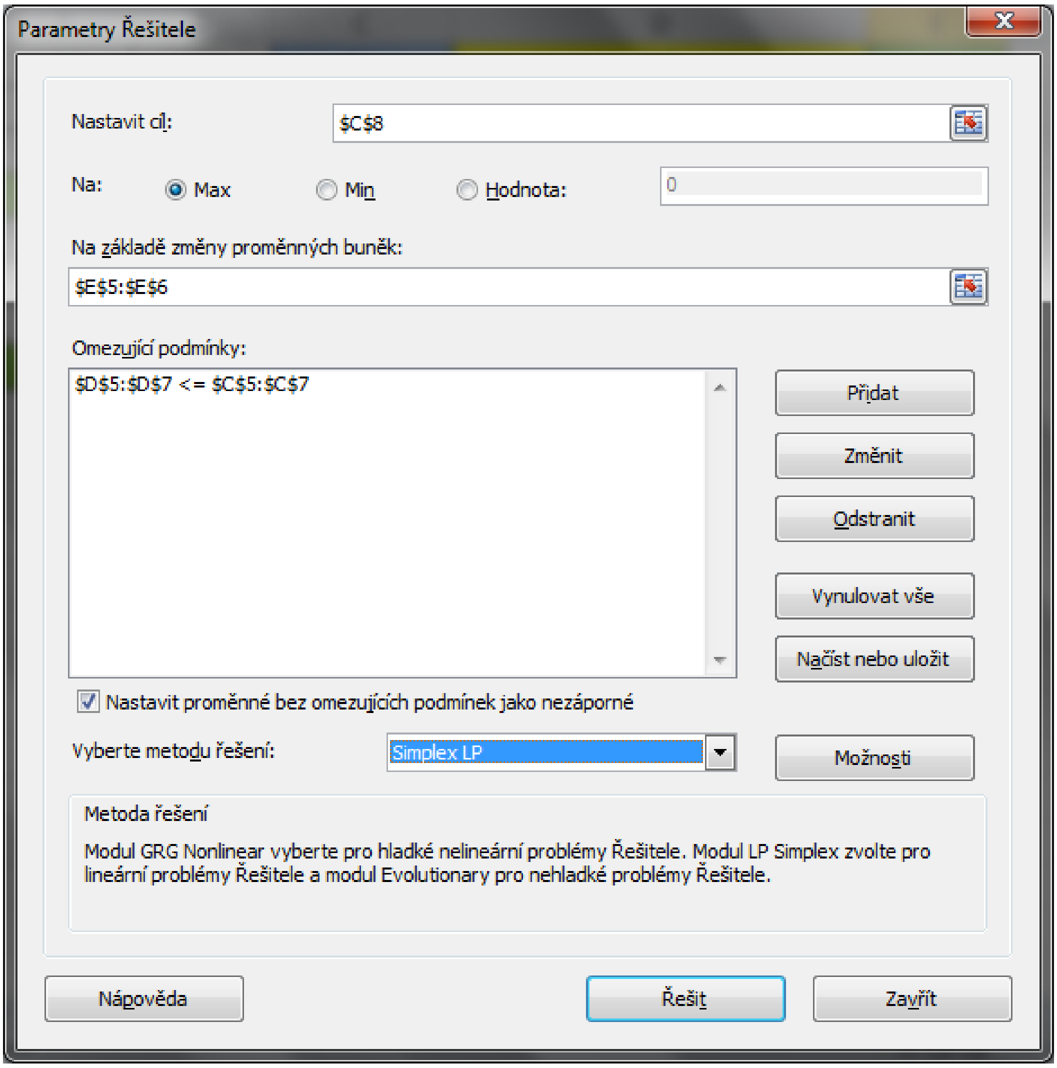
Tabulka 3.12: Výpočty v matematickém modelu úlohy v prostředí MS Excel 2010

Samotný nástroj Řešitel je nutné doinstalovat pomocí volby: *Soubor-Možnosti-Doplňky*. Z nabízených doplňků je pak nutné zvolit položku *Řešitel*. Poslední dialogové okno z popsané instalace je zobrazeno na Obrázku 3.7.



Obrázek 3.7: Zvolení nástroje řešitel v prostředí MS Excel 2010

Parametry řešitele pro naši úlohu jsou pak zobrazeny na Obrázku 3.8. Postup zadávání *Parametrů řešitele* je obdobný jako v podkapitole 3.8.



Obrázek 3.8: Parametry řešeitele v prostředí MS Excel 2010

Výsledky řešení naší úlohy jsou znázorněny v Tabulce 3.13. Vyprodukujeme tedy 40 kilogramů směsi Green Tea Orient a 80 kilogramů směsi Green Tea Classic. Celkový zisk bude činit 192 tis. Kč.

	A	B	C	D	E
1	a11	a12	b1	b1	x1
2	a21	a22	b2	b2	x2
3	a31	a32	b3	b3	
4	c1	c2	z		
5	0,5	0,25	40	40	40
6	0,5	0,5	60	60	80
7	0	0,25	25	20	
8	2	1,4	192		

Tabulka 3.13: Řešení úlohy v prostředí MS Excel 2010

3.10. Ekonomický a matematický model dopravního problému

Dopravní problém představuje typickou úlohu lineárního programování, která se zabývá modelováním praktického problému optimalizace přepravy určité komodity nebo zboží. V dopravním problému pracujeme se dvěma typy prvků. K dispozici máme *m* zdrojů (jedná se např. o sklady, dodavatele), které označujeme $D_1, D_2, ..., D_m$ a *n* cílových míst (jedná se o odběratele), které označujeme $O_1, O_2, ..., O_n$. Jednotlivým zdrojům jsou pak přiřazeny postupně dílčí kapacity $a_1, a_2, ..., a_m$, neboli množství dodávky, která jsou v uvažovaném období schopny dodat odběratelům. Na straně druhé, odběratelé mají také své dílčí požadavky $b_1, b_2, ..., b_n$. Jedná se o množství, která pro zvolené období potřebují dodat.

Náklady na přepravu jedné jednotky komodity nebo zboží ze zdroje D_i k odběrateli O_j jsou označeny jako c_{ij}. Cílem řešení takovéhoto dopravního problému je stanovení objemu přepravy x_{ij} mezi dodavatelem D_i a odběratelem O_j, a to tak, aby byly uspokojeny požadavky všech dodavatelů, ale také odběratelů a aby zároveň celkové přepravní náklady na dodávky komodity či zboží byly minimální. Takovýto model dopravní úlohy je možné vyjádřit v podobě přehledné tabulky, viz Tabulka 3.14.

Dodavatelé	Odběratelé				Kapacity dodavatelů
	O_1	O_2	…	O_n	
D_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	… …	c_{1n} x_{1n}	a_1
D_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	… …	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
D_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	… …	c_{mn} x_{mn}	a_m
Požadavky odběratelů	b_1	b_2	…	b_n	$\sum a_i$ $\sum b_j$

Tabulka 3.14: Formalizovaný ekonomický model dopravního problému

Vzhledem k celkovým požadavkům odběratelů a kapacitám dodavatelů je možné rozlišit dva základní typy dopravního problému:

a) Vyrovnaný dopravní problém – jedná se o případ, kdy součet všech kapacit dodavatelů se rovná součtu všech požadavků odběratelů, tj.

$\sum b_j = \sum a_i$. Jinými slovy, všechny požadavky budou uspokojeny a zároveň budou vyčerpány všechny kapacity.

b) Nevyrovnaný dopravní problém – hovoříme o případu, kdy výše uvažovaná rovnost uvedená v předchozí variantě neplatí, neboli $\sum b_j \neq \sum a_i$. Jinými slovy, při převisu nabídky nad poptávkou zůstane část kapacity dodavatelů nevyužita, naopak při převisu poptávky nad nabídkou nedojde k uspokojení všech požadavků.

Platí, že každý nevyrovnaný dopravní problém je možné upravit na dopravní problém vyrovnaný. V tomto textu se proto dále budeme zabývat pouze vyrovnaným dopravní problémem. Úpravu na problém vyrovnaný je možné provést následujícím způsobem.

a) Při převisu nabídky nad poptávkou:

Jestliže přebývá dodavatelům přepravovaná komodita či zboží, řešíme tento problém přidáním fiktivního odběratele O_f do modelu. Jeho požadavek b_f se pak bude rovnat danému přebytku, platí tedy: $b_f = \sum a_i - \sum b_j$.

b) Při převisu poptávky nad nabídkou:

Pokud převyšuje poptávka nabídku komodity nebo zboží, je nutné model doplnit o fiktivního dodavatele D_f. V tomto případě se jeho kapacita a_f bude rovnat chybějícímu množství komodity, musí tedy platit: $a_f = \sum b_j - \sum a_i$.

Vzhledem k tomu, že přeprava mezi skutečně existujícími a fiktivními neboli neexistujícími místy je také pouze fiktivní, odpovídající cenové koeficienty jsou v tomto případě rovny nule.

V dalším kroku je nutné vyjádřit ekonomicky model dopravního problému pomocí matematických prostředků. Vzhledem k tomu, že se v modelu vyskytuje celkem *m* dodavatelů a *n* odběratelů, musíme brát v úvahu celkem *m x n* možných možností či variant přepravy. Definujeme proto celkem *m x n* proměnných x_{ij}. V modelu dopravního problému je nutné definovat celkem dva základní typy omezujících podmínek.

Prvních *m* omezení bude vyjadřovat skutečnost, že z každého zdroje či dodavatele může být přepraveno pouze množství komodity, které je rovno kapacitě příslušného zdroje neboli dodavatele. Na levých stranách těchto omezení se proto uvádějí řádkové součty proměnných x_{ij} z Tabulky 3.14, které se musejí logicky rovnat příslušným kapacitám dodavatelů a_i na pravých stranách. Dalších *n* omezujících podmínek odpovídá naopak situaci z pohledu odběratele, ke kterému je přepraveno zboží o objemu, který odpovídá jeho požadavku. Na levých stranách těchto podmínek jsou součty požadavků jednotlivých odběratelů x_{ij}. Matematický model vyrovnaného dopravního problému je možné zapsat následujícím způsobem:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow MIN, \tag{3.28}$$

při omezujících podmínkách:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ &i = 1, 2, \ldots, m, \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \\ &\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, n, \\ &x_{ij} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Řešený příklad:

Ve výpočetním prostředí MS Excel najděte řešení dopravní úlohy se 3 dodavateli (velkoobchody s alkoholickými nápoji) a 3 odběrateli (hypermarkety MAKRO). Zadání je uvedeno v následující Tabulce 3.15.

Dodavatelé	Odběratelé			Kapacity dodavatelů
	O_1	O_2	O_n	
D_1	10	13	6	100
D_2	15	18	10	150
D_m	8	12	11	300
Požadavky odběratelů	130	210	160	550 500

Tabulka 3.15: Formalizovaný ekonomický model dopravního problému

Postup použití výpočetního prostředí MS Excel 2010 pro řešení dopravního problému je analogický jako dřívější postup při řešení jiných úloh lineárního programování, které jsou uvedeny v této kapitole. V prvním kroku je nutné začít tím, že si vyčleníme místo ve spreadsheetu, kam budeme zapisovat vstupní údaje, vzorce ale také proměnné, které jsou obsahem řešené úlohy. Jedna z možných variant uspořádání je znázorněna na Obrázku 3.9.

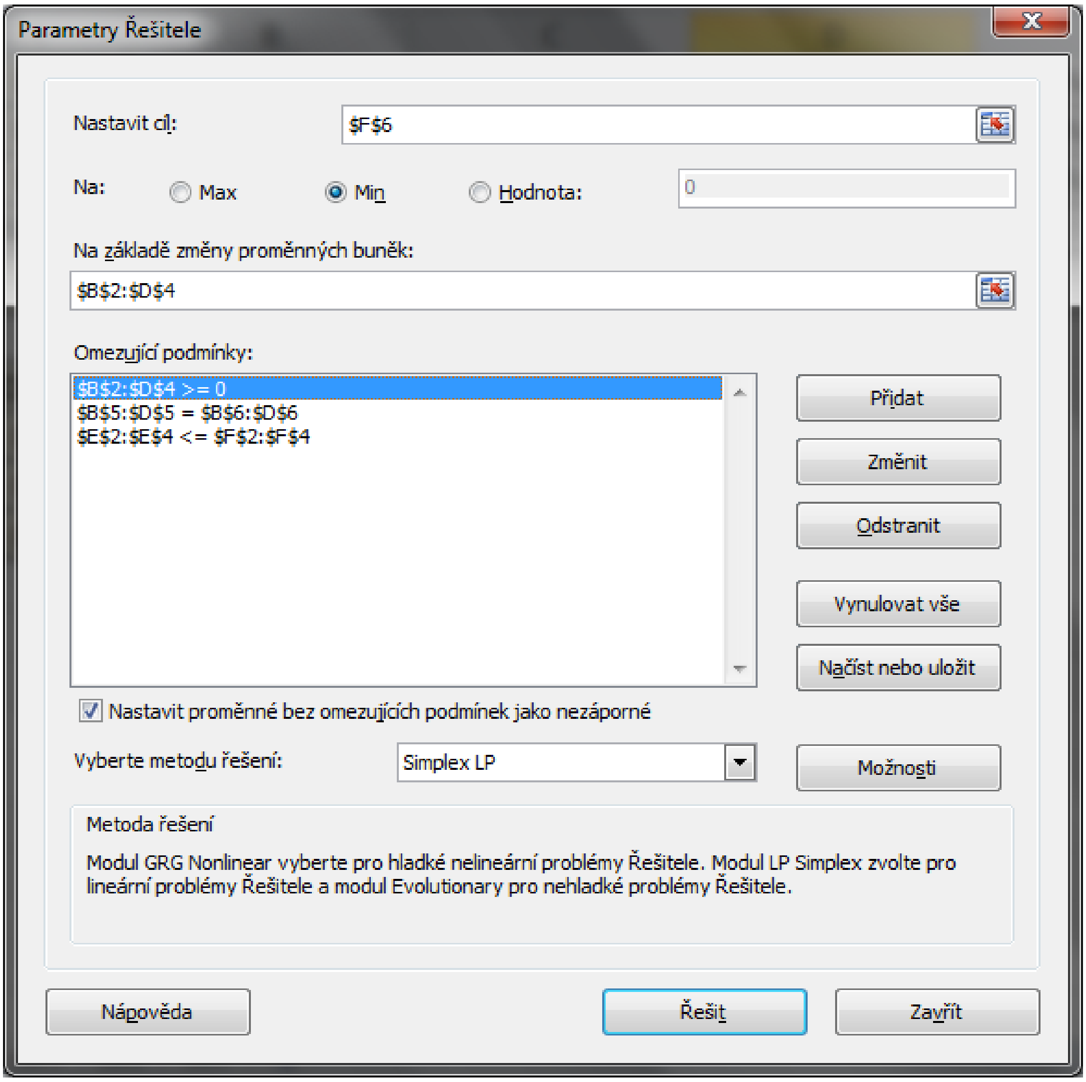
	A	B	C	D	E	F
1		**O1**	**O2**	**O3**	**SUMA**	**a_i**
2	**D1**				=SUMA(B2:D2)	100
3	**D2**				=SUMA(B3:D3)	150
4	**D2**				=SUMA(B4:D4)	300
5	**SUMA**	=SUMA(B2:B4)	=SUMA(C2:C4)	=SUMA(D2:D4)	0	550
6	**b_j**	130	210	160	500	=SOUČIN.SKALÁRNÍ(B2:D4;B9:D11)
7						
8	**CENY**	**O1**	**O2**	**O3**		
9	**D1**	10	13	6		
10	**D2**	15	18	10		
11	**D2**	8	12	11		

Obrázek 3.9: Vstupní data dopravního problému v prostředí MS Excel – verze 2010

V tomto případě se jedná o nevyrovnaný dopravní problém, který není nutné řešit pomocí fiktivního odběratele a problém vyrovnat. V bloku B2:D4 jsou umístěny proměnné, které je nutné vypočítat. Do těchto buněk není nutné na počátku zadávat žádné hodnoty, případně je možné je vyplnit pouze nulami.

V bloku B5:D5 jsou umístěny součty hodnot ze sloupců nad nimi. Podobně se v bloku E2:E4 nacházejí součty řádkové. V buňkách B6:D6 jsou potom zobrazeny požadavky odběratelů, v buňkách F2:F4 pak doplněny kapacity jednotlivých dodavatelů. V bloku B9:D11 jsou potom uvedeny jednotkové přepravní náklady. Účelovou funkci jsme umístili do buňky F6. Její hodnotu vypočítáme jako součin modelových proměnných a jednotkových přepravních nákladů. Pro výpočet tohoto součinu můžeme použít funkci SOUČIN.SKALARNI. V dalším kroku použijme nástroj *Řešitel*, který je podrobně popsán v podkapitole 3.8

Na Obrázku 3.10 jsou zobrazeny parametry nástroje *Řešitel* pro naši úlohu. Vzhledem k tomu, že cílem řešení dopravní úlohy je minimalizace celkových nákladů na dopravu, nastavíme v Řešiteli buňku F6 na Min. Jako měněnými buňkami zvolíme proměnné, které se nacházejí v bloku B2:D4. Omezující podmínky musí obsahovat zároveň podmínky nezápornosti pro všechny proměnné, ale také podmínky, které vyjadřují porovnaní jednotlivých kapacit dodavatelů a požadavků odběratelů. Vzhledem k tomu, že se jedná o nevyrovnaný problém s převisem nabídky, nemůžou odběratelé odebrat veškeré nabízené množství. Tento převis je vyjádřen znakem nerovnosti ve třetí omezující podmínce. Parametry nabídky *Možnosti řešitele* je možné nastavit stejně, jako tomu bylo v podkapitole 3.8. Nakonec zvolíme tlačítko *Řešit*.



Obrázek 3.10: Parametry řešitele dopravní úlohy v prostředí MS Excel – verze 2010

Výsledné řešení je zachyceno na Obrázku 3.11. Z obrázku je patrné, že např. přeprava od dodavatele *D*2 k odběrateli *O*2 se nebude realizovat, v příslušné buňce C3 je nulová hodnota, od dodavatele *D*3 k odběrateli *O*2 se přepraví 170 jednotek komodity, v příslušné buňce C4 je hodnota 170. Celkové přepravní náklady jsou zobrazeny v buňce F6. Celková minimalizovaná hodnota těchto nákladů činí 4960.

	A	B	C	D	E	F
1		**O1**	**O2**	**O3**	**SUMA**	**a_i**
2	**D1**	0	40	60	100	100
3	**D2**	0	0	100	100	150
4	**D2**	130	170	0	300	300
5	**SUMA**	130	210	160	0	550
6	**b_j**	130	210	160	500	4960
7						
8	**CENY**	**O1**	**O2**	**O3**		
9	**D1**	10	13	6		
10	**D2**	15	18	10		
11	**D2**	8	12	11		

Obrázek 3.11: Výsledné řešení dopravní úlohy v prostředí MS Excel – verze 2010

3.11. Přiřazovací problém – speciální typ dopravní úlohy

Speciálním typem dopravního problému je problém přiřazovací. Podstatou tohoto problému je přiřazení *n* objektů na *n* aktivit a to tak, abychom maximalizovali celkový užitek z tohoto přiřazení:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow MAX, \tag{3.30}$$

za omezujících podmínek:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \\
&i = 1, 2, ..., n, \\
&\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \\
&j = 1, 2, ..., n, \\
&x_{ij} \in \{0,1\}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Přičemž c_{ij} představuje dílčí užitek z přiřazení objektu *i* aktivitě *j*,

$x_{ij} = 1,$ v případě, že objekt *i* přiřadíme aktivitě *j*,

$x_{ij} = 0,$ v případě, že objekt *i* nepřiřadíme aktivitě *j*.

Z předchozího textu je zřejmé, že v každé omezující podmínce existuje právě jedno $x_{ij} = 1,$, ostatní jsou rovny 0. Jinými slovy, každé aktivitě je přiřazen právě jeden objekt. Čtvercová matice typu $n\ x\ n$, jež je vytvořena z prvků x_{ij} obsahuje v každém řádku a také v každém sloupci právě jednu jedničku.

Řešený příklad:

Po absolvování studia se 3 absolventi (U1, U2 a U3) oboru Matematické metody v ekonomii přihlásili na 3 uvolněné pozice ve firmě ČEZ. První pracovní pozice vyžaduje především numerické a jiné početní dovednosti, druhá pozice pak znalosti programování a třetí schopnost jednat s lidmi. Uchazeči se proto podrobili speciálním třem testům, a to testu numerickému T1, testu programování T2 a testu komunikace T3. V každém z těchto 3 testů bylo možné dosáhnout nejvýše 100 bodů. Výsledky testů jednotlivých uchazečů v jednotlivých testech jsou uvedeny v následující Tabulce 3.12. Počet dosažených bodů v daném testu lze považovat za aproximaci stupně kompetence uchazeče pro uvolněnou pozici.

Jakým způsobem mají být uchazeči na uvolněné pozice přiděleni tak, aby celková dosažená kompetence byla co nejvyšší. Sestavte matematický model úlohy a vyřešte úlohu v prostředí MS Excel.

	T1	T2	T3
U1	60	70	80
U2	65	20	45
U3	70	10	45

Tabulka 3.12: Zadání přiřazovacího problému v prostředí MS Excel – verze 2010

Matematický model našeho přiřazovacího problému je možné sestavit následovně. V prvním kroku položíme $x_{ij} = 1$, pokud uchazeče U_i přiřadíme na pozici j, jinak $x_{ij} = 0,$, přitom $i, j = 1, 2, 3.$

Přitom pokud uchazeče U_i přiřadíme na pozici j, pak dílčí kompetence z tohoto přiřazení odpovídá výsledku uchazeče U_i v testu T_j a je tedy rovna součinu $t_{ij}x_{ij}$, kde t_{ij} představuje výsledek uchazeče U_i v testu T_j. Celková kompetence všech uchazečů ve všech testech je pak daná součtem všech dílčích kompetencí.

Matematicky model naší úlohy lze zapsat následujícím způsobem:

$$50x_{11} + 70x_{12} + 80x_{13} + 65x_{21} + 20x_{22} + 45x_{23} + 70x_{31} + 10x_{32} + 45x_{33} \to MAX,$$

Při omezujících podmínkách:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1,$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1,$$
$$x_{ij} \in \ 0,1\ .$$

Naši úlohu opět vyřešíme v prostředí MS Excel s využitím nástroje *Řešitel.*

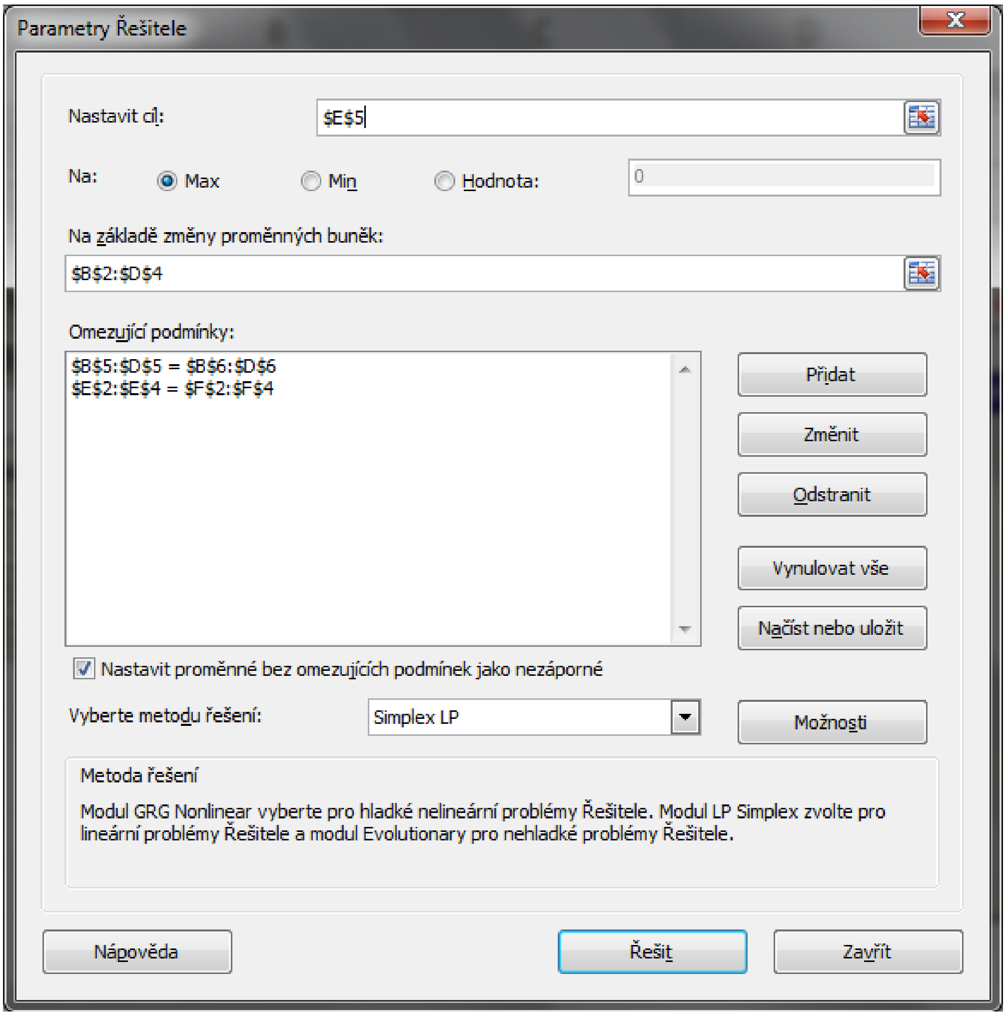
Vstupní data jsou zobrazena na Obrázku 3.13. Uspořádání dat je stejné jako v dopravním problému na Obrázku 3.9. Z důvodů kontroly výpočtu byly do bloku proměnných B2:D4 vloženy samé jedničky. Hodnota účelové funkce je pak součtem všech dílčích kompetencí, tedy celkem představuje hodnotu 465. Takovéto stanovení výchozích hodnot není však řešením přípustným.

	A	B	C	D	E	F
1		**T1**	**T2**	**T3**	**SUMA**	**Ai**
2	**U1**	1	1	1	3	1
3	**U2**	1	1	1	3	1
4	**U3**	1	1	1	3	1
5	**SUMA**	3	3	3	465	
6	**Bj**	1	1	1		
7						
8	**Kompetence**	**T1**	**T2**	**T3**		
9	**U1**	60	70	80		
10	**U2**	65	20	45		
11	**U3**	70	10	45		

Obrázek 3.13: Vstupní data přiřazovacího problému v prostředí MS Excel – verze 2010

Parametry nástroje *Řešitel* na Obrázku 3.14 jsme zvolili podobně jako v dopravním problému na Obrázku 3.10. V tomto příkladu jsme však namísto tlačítka *Min*, označili tlačítko *Max*. Proměnné bez omezujících podmínek je pak nutné nastavit jako nezáporné.

Výsledné řešení naší úlohy je zobrazeno na Obrázku 3.15. Z dosažených výsledků vyplývá, že optimálním řešením úlohy je přiřazení uchazeče U1 na 2. pozici, uchazeče U2 na 3. pozici a uchazeče U3 na 1. pozici. Maximální hodnota celkových kompetencí dosažených na základě provedených testů je pak 185.



Obrázek 3.14: Parametry řešitele přiřazovacího problému v prostředí MS Excel – verze 2010

	A	B	C	D	E	F
1		**T1**	**T2**	**T3**	**SUMA**	**Ai**
2	**U1**	0	1	0	1	1
3	**U2**	0	0	1	1	1
4	**U3**	1	0	0	1	1
5	**SUMA**	1	1	1	**185**	
6	**Bj**	1	1	1		
7						
8	**Kompetence**	**T1**	**T2**	**T3**		
9	**U1**	60	70	80		
10	**U2**	65	20	45		
11	**U3**	70	10	45		

Obrázek 3.15: Optimální řešení přiřazovacího problému v prostředí MS Excel – verze 2010

Shrnutí:

Třetí kapitola byla věnována problematice úloh lineárního programování. Kromě vymezení základních pojmů byla popsána simplexová metoda řešení úloh lineárního programování, vysvětlen vztah mezi primární a duální úlohou lineárního programování, a to včetně ekonomické interpretace duality. Navíc bylo popsáno řešení vybraných typických úloh lineárního programování v prostředí softwaru MS Excel – verze 2010.

4. Teorie her

Klíčová slova: antagonistický konflikt, čistá strategie, hra s konstantním součtem, neantagonistický konflikt, optimální strategie, strategie, smíšené strategie, výplatní funkce.

4.1. Základní pojmy teorie her

V předchozích kapitolách jsme se zabývali úlohami, které byly typické skutečností, že jejich řešení ovlivňoval jediný rozhodovací individuální či kolektivní subjekt, viz (Anderson, D. R., Sweeney, D. J. a Williams, T. A., 1994) nebo (Gros, I., 2003). V této kapitole se budeme zabývat jiným typem úloh, které jsou typické tím, že výsledek rozhodovacího procesu je ovlivňován více účastníky. Tito účastníci mají buďto zájem na výsledcích rozhodování anebo výsledek rozhodnutí přímo nebo nepřímo ovlivňují, ale nezajímá je. První skupinu účastníků můžeme označit jako racionální účastníky, druhou skupinu pak jako účastníky rozhodovací situace indiferentní. Základní myšlenky, principy a pojmy z oblasti teorie her jsou popsány například v (Morgenstern, O. a von Neumann, J., 2004).

Teorie her se původně zabývala společenskými hrami, což se odrazilo také v odlišném názvosloví, než se běžně používá například v ekonomii. V dalším textu budeme používat pojmový aparát v podobě, která je uvedená v Tabulce 4.1:

Teorie her	Ekonomická realita
hra	rozhodovací situace, konflikt
hráč	účastník konfliktu (firma, jedinec)
strategie	konkrétní alternativa, kterou může hráč zvolit
optimální strategie	hráčem zvolená alternativa, která je pro něj nejvýhodnější
prostor strategií	seznam alternativ, které jsou hráči dostupné
výplatní funkce	výsledek hry, zisk hráče v závislosti na strategii

Tabulka 4.1: Základní pojmy z oblasti teorie her

Základní pojmy z oblasti teorie her doplníme klasifikací her. V případě, že je prostor strategií, které mohou hráči přijímat, konečný, hovoříme o tzv. konečných hrách. Pokud mohou hráči přijímat nekonečně mnoho strategií, hovoříme o hrách nekonečných.

Jiné členění her je založeno na skutečnosti, zda je suma možných výher hráčů, které mohou získat, konstantní či nikoliv, viz (Maňas, M., 2002). Rozlišujeme pak hry:

a) S konstantním součtem výher. K těmto hrám patří také tzv. hra s nulovým součtem výher.

b) S proměnným součtem výher, kdy se suma výher mění v závislosti na přijatých strategiích hráčů.

Hry s konstantním součtem patří do skupiny tzv. antagonistických konfliktů či her. Důvodem je skutečnost, že účastníci hry jsou v přímém rozporu. Vyšší výhra jednoho z účastníků hry totiž znamená pokles výhry ostatních hráčů. Hry s proměnným součtem výher patří do skupiny tzv. neantagonistických her či konfliktů. V těchto rozhodovacích situacích může být pro účastníky hry výhodné, když se domluví na společném postupu. Potom rozlišujeme v rámci této skupiny hry kooperativní a nekooperativní. V případě, že na výsledek rozhodnutí vliv indiferentní účastníci, hovoříme o tzv. hře v normálním tvaru.

4.2. Hra dvou hráčů v normálním tvaru

Nejjednodušším příkladem hry je situace, kdy se hry účastní pouze a jen dva racionální hráči. Tito hráči mají znalosti o vzájemných množinách strategií, přičemž součet jejich výher je konstantní.

Označíme:

$X_1 = \ 1, 2, \dots, m$ množinu strategií prvního hráče,

$X_2 = \ 1, 2, \dots, n$ množinu strategií druhého hráče,

$z_1 = \ i, j$ výhru prvního hráče,

$z_2 = \ i, j$ výhru druhého hráče.

Z předchozího výkladu vyplývá, že výhry obou hráčů budou vždy záviset na strategiích, které přijme první i druhý hráč. Vzhledem k tomu, že se jedná o antagonistický konflikt, platí pak:

$$z_1 \ i, j \ + z_2 \ i, j \ = K. \tag{4.1}$$

Výhru druhého hráče pak lze vyjádřit následovně:

$$z_2 \ i, j \ = K - z_1 \ i, j \ . \tag{4.2}$$

Při řešení těchto úloh lze pracovat jen s výhrami prvního hráče. Výhry tohoto hráče příslušejí různým kombinacím strategií obou hráčů. Ty pak můžeme zapsat do obdélníkové matice *A* výher typu (*m, n*) ve tvaru:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ K & K & K & K \\ a_{m-1} & a_{m2} & K & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

kde a_{kl} je např. výhra prvního hráče v případě, že zvolí strategii k a pokud druhý hráč zvolí strategii l. Vzhledem k tomu, že je možné zapsat výhry ve formě maticového zápisu, je používáno pro tento typ her označení maticové hry.

Řešený příklad:

Dva konkurenční podniky podnikající v oblasti výroby žaluzií ISOTRA OPAVA a SERVICE CLIMAX VSETÍN se rozhodují o účasti na dvou veletrzích v Rusku (Moskva a Sankt Peterburg), kde lze očekávat uzavření kontraktů o velikosti 21 mil. Kč na prvním veletrhu a 15 mil. Kč na druhém veletrhu. Každá z těchto firem má vzhledem k omezeným prostředkům možnost účastnit se velkou expozicí na 1. veletrhu, velkou expozicí na 2. veletrhu, malými expozicemi na obou veletrzích nebo neúčastnit se ani na jednom veletrhu.

Očekávaný podíl na získaných smlouvách je následující:

a) Bude-li na nějakém veletrhu pouze jedna firma, získá 100% objemu kontraktů,

b) Bude-li na jednom veletrhu jedna malá a jedna velká expozice, rozdělí se zakázky v poměru 1:2,

c) Budou-li mít obě firmy stejnou expozici v místě, rozdělí si zakázky v poměru 1:1,

d) Nebudou-li obě firmy na místě, rozdělí si zakázky opět v poměru 1:1.

Celková suma zakázek nemůže převýšit 36 mil. Kč.

V dalším kroku definujeme prvky matice A pro naši rozhodovací situaci. Vypočteme získaný objem zakázek firmy ISOTRA OPAVA např. pro případ, že se firma rozhodne k účasti s velkou expozicí na veletrhu 1, označíme ji jako strategie 1, a druhá firma SERVICE CLIMAX VSETÍN malými expozicemi na obou veletrzích, označíme ji jako strategie 3:

a) Na prvním veletrhu získá firma ISOTRA OPAVA 21.(2/3)=14 mil. Kč,

b) Na druhém veletrhu nezíská firma ISOTRA OPAVA nic, veletrhu se totiž účastní jen konkurenční firma SERVICE CLIMAX VSETÍN.

Obdobně je možné vypočítat výhry pro ostatní kombinace strategií, viz Tabulka 4.2. Matice zakázek firmy ISOTRA OPAVA pak bude mít následující podobu:

		Strategie firmy SERVICE CLIMAX			
		1.	2.	3.	4.
Strategie firmy ISOTRA OPAVA	1.	18	21	14	28,5
	2.	15	18	10	25,5
	3.	22	26	18	36
	4.	7,5	10,5	0	18

Tabulka 4.2: Matice zakázek firmy ISOTRA OPAVA v mil. Kč

V dalším kroku formulujeme pojem optimální strategie. Z předchozího výkladu vyplývá, že každá firma se snaží maximalizovat svou výhru. Proto bude za svou optimální strategii považovat takovou variantu, od níž jakákoli odchylka bude znamenat pouze zhoršení jeho výhry při předpokladu, že protihráč zvolí svou strategii optimální. Tedy za optimální strategii prvního hráče, $i^{opt} \in X_1$, pro kterou existuje $j^{opt} \in X_2$, považujeme takovou, pro kterou platí následující nerovnosti:

$$\begin{aligned} z_1(i, j^{opt}) &\le z_1(i^{opt}, j^{opt}), \\ z_2(i^{opt}, j) &\le z_2(i^{opt}, j^{opt}), \end{aligned} \qquad (4.4)$$

pro všechna $i \in X_1$ a $j \in X_2$.

Vektor strategií $x = (i^{opt}, j^{opt})$ je pak řešením maticové hry v tzv. čistých strategiích. Popis postupu nalezení strategií obou hráčů je zřejmý z následujícího srovnání jejich chování, viz Tabulka 4.3:

Chování prvního hráče	Chování druhého hráče
První hráč usiluje volbou své i-té strategie o maximalizaci své výhry. Volí jednu z hodnot a_{ij} z matice A. Takový hráč je tedy označován jako maximalizující hráč. Zvolí-li i-tou strategii, má zajištěno minimálně $\min_j a_{ij}$. Jeho cílem je však tuto hodnotu maximalizovat, neboli dosáhnout $\max_i \min_j a_{ij}$.	Druhý hráč usiluje o maximalizaci rozdílu $K - a_{ij}$, neboli minimalizaci výhry prvního hráče. Můžeme jej označit za minimalizujícího hráče. Pokud tento hráč zvolí j-tou strategii, znamená to, že první hráč nezíská více než $\max_i a_{ij}$. Jeho cílem je tuto hodnotu minimalizovat, neboli dosáhnout $\min_j \max_i a_{ij}$.

Tabulka 4.3: Postup nalezení strategií obou hráčů

Lze dokázat, že největší z minimálních výher, které může získat první hráč, nemůže překročit nejvyšší výhru, kterou chce druhý hráč minimalizovat. Jestliže tedy rovnost:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}, \tag{4.5}$$

pak má úloha řešení v čistých strategiích a matice A má sedlový bod $x = \; i^{opt}, j^{opt} \;$.

Postup nalezení sedlového bodu vyplývá z odvozeného vztahu (4.5) a lze jej zapsat následovně:

a) k matici výher A doplníme jeden pomocný řádek a sloupec,

b) do sloupce zapíšeme minimální hodnoty matice A v příslušném řádku,

c) do řádku pak doplníme maximální hodnoty matice A v příslušném sloupci,

d) z vypočtených minimálních hodnot najdeme hodnotu maximální a obdobně z vypočtených maximálních hodnot zvolíme minimální hodnotu,

e) pokud jsou tyto hodnoty stejně veliké, nalezli jsme řešení dané hry v tzv. čistých strategiích.

Realita je však často odlišná. Ne vždy se totiž podaří najít sedlový bod dané hry v čistých strategiích. Obvykle neplatí rovnost dle vztahu (4.5), ale naopak platí nerovnost ve tvaru $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$. Z tohoto důvodu není možné najít pár čistých optimálních strategií. Pokud nastane situace, kdy není možné přijmout jednorázové rozhodnutí, ale pouze nalézt vhodné střídání strategií, které zajistí, aby první hráč získal v průměru vyšší výhru, než je $\max_i \min_j a_{ij}$, a zároveň, aby druhý hráč snížil výhru prvního hráče pod hranici $\min_j \max_i a_{ij}$, je možné nalézt řešení hry v tzv. smíšeném rozšíření hry.

		Strategie firmy SERVICE CLIMAX				$\min_j$
		1.	2.	3.	4.	
Strategie firmy ISOTRA OPAVA	1.	18	21	14	28,5	14
	2.	15	18	10	25,5	10
	3.	22	26	18	36	18
	4.	7,5	10,5	0	18	0
$\max_i$		22	26	18	28,5	

Tabulka 4.4: Matice výher

V našem příkladu jsme nalezli sedlový bod $x = (3, 3)$. Jinými slovy, obě firmy by měly zvolit 3. strategii, tedy účast na obou veletrzích s malými expozicemi. Obě firmy budou tedy mít zajištěn objem zakázek ve stejné výši, a to 18 mil. Kč.

Řešený příklad:

Televizní stanice NOVA a PRIMA se rozhodují, jaký typ pořadu zařadit do vysílání v pondělí večer v tzv. primetimu od 20 do 22 hodin. Budeme předpokládat, že se rozhodují mezi komedií, akčním filmem a kriminálním filmem. Na základě dat získaných z průzkumu sledovanosti byla sestavena matice sledovanosti. Jednotlivé hodnoty této matice představují počet diváků v mil., kteří by pořad stanice NOVA sledovali z celkového počtu 10 mil. potenciálních diváků:

		Pořady stanice PRIMA			$\min_j$
		komedie	akční f.	krimi	
Pořady stanice NOVA	komedie	1,8	1,1	2,9	1,1
	akční f.	2,5	2,7	2,1	2,1
	krimi	1,9	0,8	3,4	0,8
$\max_i$		2,5	2,7	3,4	

Tabulka 4.5: Výpočetní matice

Z tabulky vyplývá, že tato úloha nemá sedlový bod, neboť platí: $\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij} = 2,5.$

4.3. Smíšené rozšíření hry dvou hráčů

V této podkapitole nebude naším úkolem nalezení čistých strategií, ale pravděpodobností, se kterými by měli hráči střídat své strategie, aby dosáhli v průměru maximální možné výhry. Budeme tedy hledat tzv. smíšené strategie x_{1i} a x_{2j} z následujících prostorů:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= x_{1i}\ ,\ \sum_{i=1}^{m} x_{1i} = 1,\ x_{1i} \geq 0, \\
X_2 &= x_{2j}\ ,\ \sum_{j=1}^{n} x_{1j} = 1,\ x_{1j} \geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Hodnoty x_{1i} a x_{2j} tedy představují pravděpodobnosti, s nimiž by měli oba hráči střídat své strategie. Střední hodnota výhry bude tedy rovna:

$$
z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{1i} a_{ij} x_{2j}, \tag{4.7}
$$

kde vektory x_1 a x_2 jsou sloupcové vektory hledaných pravděpodobností. Pro hledání řešení takových her má význam von Neumannova věta, která říká, že každá maticová hra má řešení ve smíšených strategiích. Pokud bychom tuto větu dokázali, našli bychom tím také algoritmus řešení maticových her. Odvození lze nalézt v Gros (2003).

Jestliže naši hru dvou hráčů rozepíšeme, získáme dvě úlohy lineárního programování:

a) Jednak primární úlohu, ve které se první hráč snaží maximalizovat svou výhru, tedy minimalizovat hodnotu $1/z$:

$$\min\ x_{11} + x_{12} + ... + x_{1m} \ , \tag{4.8}$$

Za soustavy omezujících podmínek:

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{12} + ... + a_{m1}x_{1m} &\geq 1, \\ a_{12}x_{11} + a_{22}x_{12} + ... + a_{m2}x_{1m} &\geq 1, \\ &... \\ a_{1n}x_{11} + a_{2n}x_{12} + ... + a_{mn}x_{1m} &\geq 1. \end{aligned} \tag{4.9}$$

b) A také úlohu duální, ve které naopak druhý hráč usiluje o snížení výhry prvního hráče, tedy maximalizuje hodnotu $1/z$:

$$\max\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} \ , \tag{4.10}$$

Za soustavy omezujících podmínek:

$$\begin{aligned} a_{11}x_{21} + a_{12}x_{22} + ... + a_{1n}x_{2n} &\geq 1, \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + ... + a_{2n}x_{2n} &\geq 1, \\ &... \\ a_{m1}x_{21} + a_{m2}x_{22} + ... + a_{mn}x_{2n} &\geq 1. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Přičemž platí $\sum_{i=1}^{m} x_{1i} = 1/z$ a $\sum_{j=1}^{n} x_{2j} = 1/z$, kde z je hodnota výhry.

Řešený příklad:

Vraťme se zpět k poslednímu řešenému příkladu, který byl zaměřen na uvedení různých typů pořadů na televizních stanicích NOVA a PRIMA. Definujme pro tento případ primární i duální úlohu dle rovnic (4.8) - (4.11). Matice *A* neobsahuje v našem případě záporné prvky, proto je možné zapsat:

a) Primární úloha:

$$\min\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \ , \tag{4.12}$$

$$
\begin{aligned}
&1,8x_{11} + 2,5x_{12} + 1,9x_{13} \geq 1,\\
&1,1x_{11} + 2,7x_{12} + 0,8x_{13} \geq 1,\\
&2,9x_{11} + 2,1x_{12} + 3,4x_{13} \geq 1,\\
&x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

b) Duální úloha:

$$
\max \ \ x_{21} + x_{22} + x_{23} \ \ , \tag{4.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&1,8x_{21} + 1,1x_{22} + 2,9x_{23} \leq 1,\\
&2,5x_{21} + 2,7x_{22} + 2,1x_{23} \leq 1,\\
&1,9x_{21} + 0,8x_{22} + 3,4x_{23} \leq 1,\\
&x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

V následujících dvou tabulkách je zobrazeno zadání obou úloh v prostředí MS Excel a s pomocí nástroje řešitel jsou nalezeny optimální strategie, viz Obrázek 4.1 a 4.2.

	A	B	C	D	E	F
1	Maticová hra - smíšené rozšíření					
2	0	0,34667	0,08	0	0,17333	0,25333
3	x11	x12	x13	x21	x22	x23
4	Omezení primární úlohy			Omezení duální úlohy		
5	1.	1,01867		1.	0,92533	
6	2.	1		2.	1	
7	3.	1		3.	1	
8	účelová funkce			účelová funkce		
9	0,42667			0,42667		
10						
11	Přepočtené pravděpodobnosti					
12	x11	0	x21	0		
13	x12	0,8125	x22	0,40625		
14	x13	0,1875	x23	0,59375		
15	suma	1		1		

Obrázek 4.1: Řešení v prostředí MS Excel – verze 2010

	A	B	C	D	E	F
1	Maticová hra - smíšené rozšíření					
2	0	0,346666666666667	0,08	0	0,173333333333333	0,253333333333333
3	x11	x12	x13	x21	x22	x23
4	Omezení primární úlohy			Omezení duální úlohy		
5	1.	=1,8*$A$2+2,5*$B$2+1,9*$C$2		1.	=1,8*$D$2+1,1*$E$2+2,9*$F$2	
6	2.	=1,1*$A$2+2,7*$B$2+0,8*$C$2		2.	=2,5*$D$2+2,7*$E$2+2,1*$F$2	
7	3.	=2,9*$A$2+2,1*$B$2+3,4*$C$2		3.	=1,9*$D$2+0,8*$E$2+3,4*$F$2	
8	účelová funkce			účelová funkce		
9	=A2+B2+C2			=D2+E2+F2		
10						
11	Přepočtené pravděpodobnosti					
12	x11	=A2/$A$9	x21	=D2/$D$9		
13	x12	=B2/$A$9	x22	=E2/$D$9		
14	x13	=C2/$A$9	x23	=F2/$D$9		
15	suma	=SUMA(B12:B14)		=SUMA(D12:D14)		

Obrázek 4.2: Vzorce použité při výpočtu

Řešený příklad:

Na trhu komerčních televizí existují dvě celoplošné stanice, a to stanice NOVA a PRIMA. Tyto subjekty se snaží získat co největší objem prostředků z reklamy, a tím i maximalizovat své zisky. Jedna z možností zvyšování zisku spočívá ve zvyšování sledovanosti vlastních pořadů. Na základě empirických dat z let 2010, 2011 a 2012 určíme nejlepší strategie obou stanic v jednotlivých letech. Zbylé stanice, které na českém trhu působí, mají natolik nízkou sledovanost, že je lze v tomto případě opomenout a považovat stanice NOVA a PRIMU za dva antagonistické hráče.

V úloze bude sledována průměrná týdenní sledovanost obou stanic v uvedených letech, sledovanost v tzv. prime timu (PT) (19:00–23:00), sledovanost mimo prime time (OPT) (23:00–19:00), dále sledovanost v období Vánoc a cena za zasáhnutí 1% cílové skupiny (CPP). Průměrná týdenní sledovanost vyjadřuje průměrné procento lidí z cílové skupiny, kteří sledovali televizi v průběhu týdne. CPP, tedy cena za zasáhnutí 1 % cílové skupiny, je též cena za jeden procentní bod sledovanosti (GRP). Používá se zejména k určení ceny televizní reklamy obvykle pro 30 sekundové stopáže. Může ale sloužit také k porovnání cenové nákladnosti různých televizních strategií.

V naší úloze budeme vycházet z následujícího ceníku za reklamu:

a) Koeficient pro čas OPT: 0,7,

b) Koeficient pro PT je proměnlivý pro různá období 0,8 – 1,25,

c) V období od ledna do první čtvrtiny prosince, v tzv. normálním období, je koeficient PT: 1,1 pro TV NOVA; 1,2 pro TV PRIMA,

d) Pro poslední tři týdny v roce je koeficient PT 0,8,

e) Cena za reklamu = referenční CPP x průměrná sledovanost,

f) Referenční CPP = základní CPP x OPT (resp. PT za dané období).

Z údajů o sledovanosti vypočteme průměr pro celý rok označený jako *PRUMER_ROK*, dále pak průměr v normálním období, označíme *PRUMER_NORM.* a ještě průměr za poslední tři týdny v prosinci, označíme jej *PRUMER_PROS.* Z internetu zjištěné základní CPP a koeficienty reklam (pro OPT a PT) pomohou k získání referenčního CPP a z něj pak vynásobením patřičnými průměry i tři typy cen za reklamu. V tomto případě se jedná o čisté strategie. Smíšené strategie získáme při libovolném poměru čistých strategií.

Matici výher získáme po odečtení příslušných výher televize NOVA od výher televize PRIMA. V následujících Tabulkách 4.6, 4.7 a 4.8 jsou uvedeny procentuální podíly sledovanosti obou televizí v cílové skupině 15+ v letech 2009-2011.

TÝDEN	NOVA	PRIMA	TÝDEN	NOVA	PRIMA	TÝDEN	NOVA	PRIMA
52/2011	24,84	17,11	**34/2011**	26,02	16,89	**16/2011**	30,97	17,21
51/2011	26,03	20,13	**33/2011**	28,61	16,81	**15/2011**	30,74	16,84
50/2011	26,79	18,68	**32/2011**	28,79	16,37	**14/2011**	32,39	15,87
49/2011	27,99	18,58	**31/2011**	27,36	16,71	**13/2011**	31,65	17,71
48/2011	27,81	19,47	**30/2011**	29,41	15,72	**12/2011**	31,85	17,84
47/2011	28,86	19,48	**29/2011**	27,44	16,73	**11/2011**	30,68	17,17
46/2011	28,11	19,02	**28/2011**	27,69	16,33	**10/2011**	30,33	16,3
45/2011	28,48	20,45	**27/2011**	27,22	16,4	**9/2011**	30,19	16,78
44/2011	28,67	19,98	**26/2011**	29,47	17,04	**8/2011**	31,96	16,98
43/2011	28,54	19,61	**25/2011**	30,38	17,67	**7/2011**	31,21	17,49
42/2011	27,75	20,78	**24/2011**	29,91	17,79	**6/2011**	30,64	17,75
41/2011	27,84	20,95	**23/2011**	30,29	18,31	**5/2011**	30,08	18,18
40/2011	27,52	19,79	**22/2011**	33,81	17,84	**4/2011**	29,84	16,95
39/2011	28,39	20,13	**21/2011**	33,83	17,26	**3/2011**	29,17	17,34
38/2011	29,57	20,25	**20/2011**	33,13	18,22	**2/2011**	29,08	17,54
37/2011	28,19	19,54	**19/2011**	26,89	14,80	**1/2011**	26,81	17,75
36/2011	29,32	18,90	**18/2011**	27,46	15,59			
35/2011	28,17	18,48	**17/2011**	29,76	16,73			

Tabulka 4.6: Sledovanost v roce 2011 (cílová skupina 15+)

TÝDEN	NOVA	PRIMA	TÝDEN	NOVA	PRIMA	TÝDEN	NOVA	PRIMA
52/2010	28,68	13,7	**34/2010**	31,88	17,77	**16/2010**	36,54	16,49
51/2010	32,81	16,02	**33/2010**	29,07	16,79	**15/2010**	35,58	16,46
50/2010	30,23	17,75	**32/2010**	29,78	16,22	**14/2010**	36,81	15,5
49/2010	31,33	18,55	**31/2010**	28,54	16,49	**13/2010**	36,96	15,54
48/2010	31,68	19,24	**30/2010**	27,76	16,86	**12/2010**	37,41	15,32
47/2010	32,69	19,21	**29/2010**	28,41	17,16	**11/2010**	37,47	15,34
46/2010	31,57	18,89	**28/2010**	28,36	17,17	**10/2010**	36,52	15,28
45/2010	31,5	18,94	**27/2010**	27,87	16,58	**9/2010**	37,56	14,85
44/2010	31,24	19,29	**26/2010**	27,91	15,69	**8/2010**	30,14	13,38
43/2010	31,39	19,11	**25/2010**	33,52	14,56	**7/2010**	30,76	13,23
42/2010	32,05	20,05	**24/2010**	31,97	14,93	**6/2010**	33,95	14,56
41/2010	32	19,65	**23/2010**	33,5	16,02	**5/2010**	36,68	15,61
40/2010	31,66	19,44	**22/2010**	34,57	16,37	**4/2010**	35,24	16,53
39/2010	31,82	18,89	**21/2010**	35,12	15,58	**3/2010**	36,05	16,06
38/2010	32,51	19,19	**20/2010**	28,59	14,89	**2/2010**	37,93	16,34
37/2010	31,98	17,92	**19/2010**	33,16	16,61	**1/2010**	36,83	15,45
36/2010	32,67	18,43	**18/2010**	35	16,69			
35/2010	32,27	18,93	**17/2010**	35,03	16,74			

Tabulka 4.7: Sledovanost v roce 2010 (cílová skupina 15+)

TÝDEN	NOVA	PRIMA	TÝDEN	NOVA	PRIMA	TÝDEN	NOVA	PRIMA
52/2009	36,97	15,75	**34/2009**	32,25	17,72	**16/2009**	39,61	16,94
51/2009	39,99	15,94	**33/2009**	34,08	18,98	**15/2009**	38,12	17,31
50/2009	39,58	15,98	**32/2009**	34,33	18,52	**14/2009**	39,22	16,62
49/2009	38,1	16,33	**31/2009**	35,09	18,46	**13/2009**	37,91	16,19
48/2009	39,23	16,61	**30/2009**	34,41	17,84	**12/2009**	38,44	16,75
47/2009	40,03	16,47	**29/2009**	33,97	17,03	**11/2009**	38,46	16,86
46/2009	38,15	16,72	**28/2009**	34,94	17,16	**10/2009**	39,44	15,97
45/2009	38,5	16,12	**27/2009**	35,79	17,36	**09/2009**	38,01	15,15
44/2009	39,88	16,75	**26/2009**	38,49	16,41	**08/2009**	39,02	14,62
43/2009	39,91	15,76	**25/2009**	39,37	17,2	**07/2009**	38,92	16,06
42/2009	39,09	16,83	**24/2009**	39,12	17,52	**06/2009**	39,71	15,41
41/2009	38,69	16,36	**23/2009**	38,79	18,53	**05/2009**	39,53	15,93
40/2009	38,98	15,93	**22/2009**	38,27	17,88	**04/2009**	39,05	16,05
39/2009	38,01	17,37	**21/2009**	39,15	18,27	**03/2009**	39,93	15,61
38/2009	39,48	16,21	**20/2009**	39,07	19,04	**02/2009**	38,51	17,13
37/2009	38,98	17,94	**19/2009**	35,96	17,7	**01/2009**	38,56	15,99
36/2009	39,28	17,43	**18/2009**	34,94	16,49			
35/2009	35,82	18,95	**17/2009**	37,98	17,59			

Tabulka 4.8: Sledovanost v roce 2009 (cílová skupina 15+)

Pro sestavení matice výher v jednotlivých letech je nutné provést některé nutné mezivýpočty, a to na základě ceníku a podílů sledovanosti v jednotlivých letech.

	2009		2010		2011	
	TV NOVA	TV PRIMA	TV NOVA	TV PRIMA	TV NOVA	TV PRIMA
PRŮMĚR_ROK	38,02135	16,87962	32,74135	16,77423	29,19096	17,889231
PRŮMĚR_NORM	37,97082	16,9402	32,87408	16,83245	29,39327	17,843265
PRŮMĚR_PROS	38,84667	15,89	30,57333	15,82333	25,88667	18,64
CPP	29600	28000	22500	28750	20250	26000
OPT	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
Referenční CPP	20720	19600	15750	20125	14175	18200
Cena_ ROK	787802,3	330840,5	515676,2	337581,4	413781,9	325584
PT_ROK	1,1	1,2	1,1	1,2	1,1	1,2
PT_PROS	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
Referenční CPP_NORM	32560	33600	24750	34500	22275	31200
Referenční CPP_PROS	23680	22400	18000	23000	16200	20800
Cena_NORM	1236330	569190,9	813633,5	580719,5	654735	556709,88
Cena_PROS	919889,1	355936	550320	363936,7	419364	387712
½ *Cena_ROK,* ¼ *Cena_NORM* ¼ *Cena_PROS*	932955,9	396701,9	598826,5	404954,7	475415,7	398897,47

Tabulka 4.9: Mezivýpočty pro určení matic výher v jednotlivých letech

V Tabulce 4.10 jsou pak uvedeny hodnoty jednotlivých strategií obou televizí v roce 2009. Sedlový bod hry lze najít v prvním řádku a prvním sloupci, a to na základě vztahu $\min_j \max_i a_{ij}$.

NOVA/PRIMA	*Cena_ROK*	*Cena_NORM*	*Cena_PROS*	1/2 *Cena_ROK* 1/4 *Cena_NORM* 1/4 *Cena_PROS*
Cena_ROK	456961,8	218611,4	431866,3	391100,3
Cena_NORM	905489,3	667138,9	880393,8	839627,8
Cena_PROS	589048,6	350698,2	563953,1	523187,1
1/2 *Cena_ROK,* 1/4 *Cena_NORM* 1/4 *Cena_PROS*	602115,4	363765	577019,9	536253,9

Tabulka 4.10: Matice výher pro rok 2009

V letech 2010 a 2011 lze sedlový bod hry nalézt opět v prvním řádku a prvním sloupci tabulek.

NOVA/PRIMA	*Cena_ROK*	*Cena_NORM*	*Cena_PROS*	*1/2 Cena_ROK 1/4Cena_NORM 1/4 Cena_PROS*
Cena_ROK	178094,808	-65043,3	151739,5	-404954
Cena_NORM	476052,126	232914	449696,9	408678,8
Cena_PROS	212738,606	-30399,5	186383,3	145365,3
1/2Cena_ROK 1/4 Cena_NORM 1/4 Cena_PROS	261245,087	18106,99	234889,8	193871,7

Tabulka 4.11: Matice výher pro rok 2010

NOVA/PRIMA	*Cena_ROK*	*Cena_NORM.*	*Cena_PROS.*	*1/2 Cena_ROK 1/4 Cena_NORM 1/4 Cena_PROS*
Cena_ROK	88197,88	-142927,998	26069,8798	14884,41
Cena_NORM	329151	98025,10714	267022,985	255837,5
Cena_PROS	93780	-137345,878	31652	20466,53
1/2 Cena_ROK 1/4 Cena_NORM 1/4 Cena_PROS	149831,7	-81294,1915	87703,6861	76518,22

Tabulka 4.12: Matice výher pro rok 2011

Zhodnocení výsledků v tabulkách je následující:

a) TV NOVA by měla za stávajících okolností zvolit za optimální první strategii, a to překvapivě pro všechny tři roky, ovšem jen za předpokladu, že tuto strategii použila i TV Prima.

b) V roce 2009 činila cena za pouze 30-ti sekundový reklamní spot TV NOVY až 456 962 Kč při průměrné roční sledovanosti 38% pro cílovou skupinu dospělí 15+.

c) V roce 2010 se cena za pouze 30-ti sekundový reklamní spot TV NOVY mohla vyšplhat na 178 085 Kč při průměrné roční sledovanosti 33% pro cílovou skupinu dospělí 15+.

d) V roce 2011 se cena za 30-ti sekundový reklamní spot TV NOVY mohla vzrůst na pouhých 88 198 Kč při průměrné roční sledovanosti 29% pro cílovou skupinu dospělí 15+.

e) Klesající zisky v letech 2009, 2010 a 2011 mohou být způsobeny buď celkovým poklesem sledovanosti nebo zaměřením jedné či obou televizních stanic na jinou cílovou skupinu.

f) Obě televize mají náklady spojené s pořízením různě drahých filmů, které se pokrývají právě příjmy z reklam. Záleží tedy na tom, zda je film dostatečně sledovaný, a tedy existuje zde návratnost prostředků, které generují zisk.

g) Televize Prima vysílá po celou dobu pro skupinu 15+, ale televize NOVA vysílala svůj program pro dospělé 15-54. Z tohoto důvodu mohou být údaje převzaté z cenové politiky televize NOVA mírně zkreslující.

h) Otázkou je, zda by si nevedla televize lépe oproti současnému stavu, kdyby upravila své koeficienty a našla vhodnější smíšenou strategii než půl na půl denní a večerní vysílání.

i) Vzhledem k výsledkům, které jsme získali, by pro obě televize bylo nejlepší, kdyby se dále zaměřily především na celodenní vysílání.

j) Dalo by se říct, že televize Prima i televize NOVA volí po celou dobu program pro celodenní vysílání.

4.4. Grafické řešení hry dvou hráčů

V případě, že jeden z hráčů vybírá pouze ze dvou strategií, je možné nalézt řešení rovněž grafickou metodou. Využití grafického řešení je sice v praxi omezené, ale lze jej využít pro ilustraci postupu výběru smíšených optimálních strategií.

V případě, že první hráč volí pouze ze dvou strategií, a druhý z n strategií, matici výher potom můžeme zapsat ve tvaru:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Vektor strategií prvního hráče má pouze dva prvky, a to: x_{11} a $1-x_{11}$. Součet dílčích pravděpodobností pak musí být roven jedné.

Pokud vybere druhý hráč strategii K, bude smíšená strategie prvního hráče $x_{11},1-x_{11}$. Střední hodnotu výhry druhého hráče pak lze zapsat ve tvaru:

$$x_{11} \quad 1-x_{11} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1k} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2k} & K & a_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} = a_{1k}x_{11} + a_{2k} \quad 1-x_{11} \quad = z \quad x_{11},k \quad . \tag{4.17}$$

Dosažená výhra druhého hráče je tedy funkcí pouze jedné proměnné, a to x_{11}, jejíž hodnota se nachází v intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Pokud zvolí druhý hráč jakoukoli čistou strategii *j*, nemůže jeho výhra pro jakékoli $x_{11} \in \langle 0,1 \rangle$ klesnout pod hodnotu minima ze $z \;\; x_{11}, j \;\;$. Volbou x_{11} se snaží dosáhnout $\max \min z \;\; x_{11}, j \;\;$ pro $x_{11} \in \langle 0,1 \rangle$.

Protože výrazy pro *z* jsou rovnice lineárních funkcí, jež vyjadřují závislost minimální výhry prvního hráče, můžeme je překreslit do dvourozměrného prostoru. Z grafu lze potom vyčíst souřadnice průsečíku těchto funkcí (přímek), který leží nejvýše nad osou *x*.

Řešený příklad:

Televize NOVA se rozhodla vzhledem k nízké sledovanosti kriminálních filmů v pondělí vypustit jejich zařazování do pondělního programu. Své vysílání zaměřila pouze na akční filmy a komedie. Budeme vycházet ze stejných dat jako v řešeném příkladu v podkapitole 4.2 na str. 76. Matice sledovanosti je uvedena v Tabulce 4.13, která má tedy následující tvar:

		Pořady stanice PRIMA			$\min_j$
		komedie	akční f.	krimi	
Pořady stanice NOVA	akční f.	2,5	2,7	2,1	2,1
	komedie	1,8	1,1	2,9	1,1
$\max_i$		2,5	2,7	2,9	

Tabulka 4.13: Matice sledovanosti

Tato úloha opět nemá řešení v čistých strategiích:

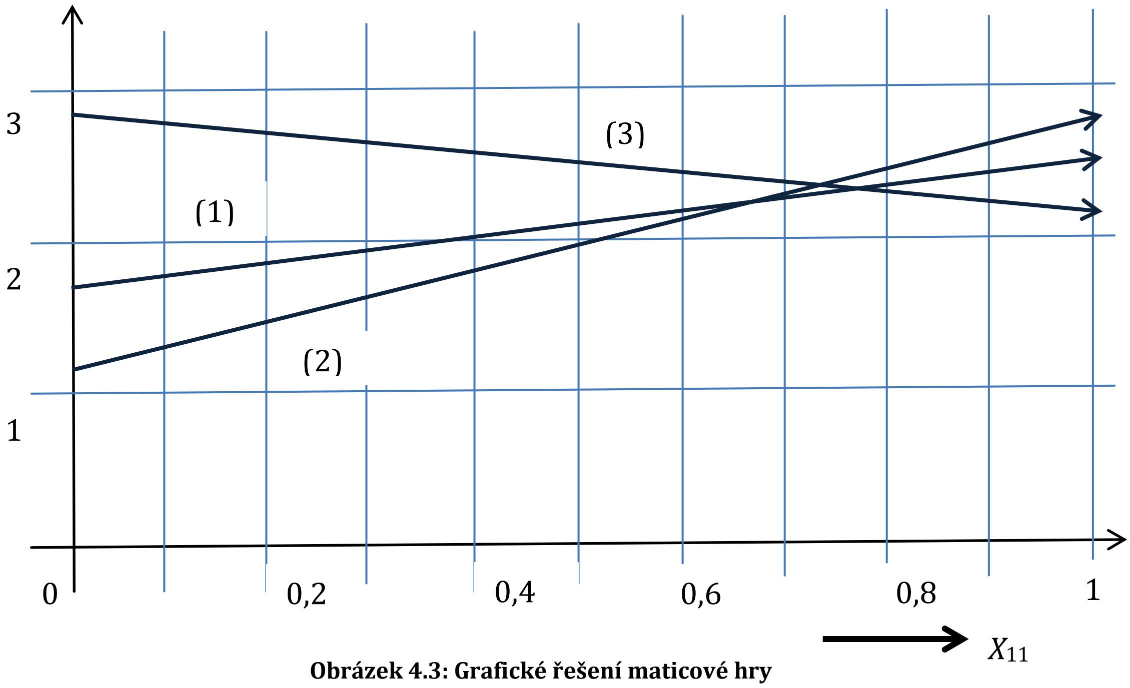
$$\max_i \min_j a_{ij} = 2,1 < \min_j \max_i a_{ij} = 2,5.$$

V dalším kroku proto upravíme výraz pro *z* na tvar:

$$z \;\; x_{11}, k \;\; = a_{2k} + \;\; a_{1k} - a_{2k} \;\; x_{11}$$

a zapíšeme rovnice lineárních funkcí (přímek) pro zadanou matici:

$$z \;\; x_{11}, 1 \;\; = 1,8 + \;\; 2,5 - 1,8 \;\; x_{11} = 1,8 + 0,7 x_{11},$$
$$z \;\; x_{11}, 2 \;\; = 1,1 + \;\; 2,7 - 1,1 \;\; x_{11} = 1,1 + 1,6 x_{11},$$
$$z \;\; x_{11}, 3 \;\; = 2,9 + \;\; 2,1 - 2,9 \;\; x_{11} = 2,9 - 0,8 x_{11}.$$



Obrázek 4.3: Grafické řešení maticové hry

Na Obrázku 4.3 jsou zakresleny lineární funkce, které vyjadřují závislost výše výhry na zvolené strategii x_{11}. Souřadnice průsečíku přímek (1) a (3) $x_{11} = 0,75$ znamená, že televize NOVA by měla nasazovat akční filmy v 75% a komedie ve 25 % případů.

Analogický postup bychom potom zvolili v případě, kdy naopak omezí výběr svých strategií na pouze dvě televize PRIMA. V tomto případě bychom hledali průsečík, který leží nejníže nad osou *x*.

4.5. Hra dvou hráčů s nekonstantní sumou výher

V reálném životě nejsou rozhodovací situace pokaždé takové, že jejich účastníci jsou v přímém antagonistickém konfliktu, přestože se jedná o přímé konkurenty. V případě hry dvou hráčů stačí porušit předpoklad, že celková suma výher obou hráčů je konstanta. V takovém případě pak musíme pracovat se dvěma maticemi výher. Jedná se o tzv. dvoumaticové hry. U těchto her máme problém s pojmem optimální strategie, který jsme v minulých podkapitolách běžně používali. V prvním kroku proto definujme rovnovážný bod hry:

$$\begin{aligned} z_1\left(i, j^r\right) &\le z_1\left(i^r, j^r\right), \\ z_2\left(i^r, j\right) &\le z_2\left(i^r, j^r\right). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Strategie $\left(i^r, j^r\right)$ se označují jako rovnovážné. Výhry hráčů pak můžeme uspořádat do dvou matic *A* a *B* s prvky a_{ij} a b_{ij}:

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= z_1(i, j), \\
b_{ij} &= z_2(i, j).
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Množinu rovnovážných bodů obou hráčů je možné nalézt způsobem, který logicky vyplývá přímo z definice rovnovážného bodu (4.18), protože platí:

$$
\begin{aligned}
z_1(i^r, j^r) &= \max_i z_1(i, j^r), \\
z_2(i^r, j^r) &= \max_j z_2(i^r, j).
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Postup určení rovnovážných bodů je následující. V matici A určíme nejprve sloupcová maxima a z nich pak vytvoříme množinu R_1. V matici B následně nalezneme řádková maxima a z nich pak sestavíme množinu R_2. Průnik obou množin $R_1 \cap R_2$ pak představuje hledanou množinu rovnovážných bodů.

Nalezený rovnovážný bod však nemusí být optimálním bodem hry. A to z několika důvodů. Buďto může být takovýchto bodů více anebo výhry, které přísluší těmto bodům, mohou mít různý poměr mezi výhrou prvního a druhého hráče.

Pokud existuje více rovnovážných bodů, pak může pomoci definice dominujícího rovnovážného bodu.

Definice 4.1: Dominující rovnovážný bod je bod (i^r, j^r), pro který platí nerovnosti:

$$
\begin{aligned}
z_1(i^r, j^r) &= \max_i z_1(i, j^r), \\
z_2(i^r, j^r) &= \max_j z_2(i^r, j).
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

V případě, že existuje jediný takový bod, nalezli jsme řešení hry. V případech, kdy je takových bodů více, existuje řešení také v případě, že půjde o tzv. záměnné rovnovážné body. Rovnovážné body lze považovat za záměnné v případě, že se hodnoty výher obou hráčů nezmění v případě jakékoli kombinace strategií (i^r, j^r).

Nalezení rovnovážných strategií vede k přijatelným řešením pouze v případech, kdy buďto existuje pouze jeden rovnovážný bod, anebo v případech, kdy jsou nalezené dominující body navzájem záměnné. Takovéto body považujeme za optimální a jim odpovídající strategie jako strategie optimální.

Dosažené výsledky neantagonistických her jsou ovlivněny kromě velikostí očekávaných výher rovněž postoji hráčů. Především se jedná o ochotu či neochotu souhlasit s případným kompromisním řešením. Jestliže hráč ustoupí z vlastního požadavku, může to vést při neústupnosti protihráče k jeho ztrátě. V případě neústupnosti obou hráčů dosáhnou nejhoršího výsledku oba hráči. Ochota ke kompromisu sice znamená vyšší výhru obou hráčů, ale absolutně výhru nižší, než kdyby neústupně prosazovali svůj postoj.

Řešený příklad:

Dvě konkurenční firmy, které podnikají v oboru telekomunikací VODAFONE a T-MOBILE uvažují o vynaložení prostředků na reklamu v médiích v Moravskoslezském kraji v částkách:

a) 8 mil. Kč (1. strategie),

b) 10 mil. Kč (2. strategie),

c) 12 mil. Kč (3. strategie).

Pokud přesáhnou náklady na reklamu u obou firem 19 mil. Kč, vzrostou celkové roční tržby obou firem ze 180 na 260 mil. Kč. Různý podíl nákladů na reklamu bude mít za následek také různý podíl obou firem na těchto částkách:

a) vynaloží-li obě firmy stejnou částku, rozdělí se tržby na polovinu,

b) vydá-li jedna firma 8 mil. Kč a druhá 10 mil. Kč, získá první firma 40% tržeb a druhá 60% tržeb,

c) utratí-li jedna firma 8 mil. Kč a druhá 12 mil. Kč, získá první firma 30% tržeb a druhá 70% tržeb,

d) vynaloží-li jedna firma 10 mil. Kč a druhá 12 mil. Kč, získá první firma 45% tržeb a druhá 55% tržeb.

Budeme předpokládat, že rentabilita tržeb je 10% a že se obě firmy budou snažit maximalizovat rozdíl mezi příjmy a náklady na reklamu, tedy dle vztahu:

TRŽBY x 0,1 x podíl na trhu – náklady na reklamu.

V následující Tabulce 4.14 jsou vypočteny zisky obou firem pro různé kombinace strategií.

Strategie VODAFONE	Zisk VODAFONE			Zisk T-MOBILE		
	Strategie T-MOBILE			Strategie T-MOBILE		
	1.	2.	3.	1.	2.	3.
1.	1	-0,8	-0,2	1	0,8	6,2
2.	0,8	3	1,7	-0,8	3	2,3
3.	6,2	2,3	1	-0,2	1,7	1
	Matice A			Matice B		

Tabulka 4.14: Dosažitlené zisky firem

V matici A nalezneme:

a) v prvním sloupci hodnotu zisku 6,2 (3,1),

b) ve druhém sloupci hodnotu zisku 3 (2,2),

c) ve třetím sloupci hodnotu zisku 1,7 (2,3).

Tedy množina $R_1 = \{(3,1),(2,2),(2,3)\}$.

V matici B nalezneme:

a) v prvním řádku hodnotu zisku 6,2 (1,3),

b) ve druhém řádku hodnotu zisku 3 (2,2),

c) ve třetím řádku hodnotu zisku 1,7 (3,2).

Tedy množina $R_2 = \{(1,3),(2,2),(3,2)\}$.

Průnik obou množin $R_1 \cap R_2$ obsahuje celkem 5 rovnovážných bodů se zisky, které jsou uvedeny v následující Tabulce 4.15.

Rovnovážný bod	Zisk VODAFONE	Zisk T-MOBILE	Suma zisků
(1,3)	-0,2	6,2	6
(2,2)	3	3	6
(2,3)	1,7	2,3	4
(3,1)	6,2	-0,2	6
(3,2)	2,3	1,7	4

Tabulka 4.15: Rovnovážné body s příslušnými zisky

V našem příkladu existuje celkem 5 rovnovážných bodů. Body (2,3) a (3,2) přinášejí celkový zisk pouze 4 mil. Kč, zatímco ostatní 3 rovnovážné body mají vyšší sumu výher. Bod (2,2) znamená, že obě firmy vynaloží na reklamu 10 mil. Kč., a obě firmy by dosáhly stejného zisku ve výši 3 mil. Kč. Jsou tady ale další dva rovnovážné body (1,3) a (3,1), se stejnou sumou výher, ale s různým poměrem výher obou hráčů.

Pro firmu VODAFONE je dominující kombinace strategií (3,1), protože:

$z_1(3,1) = 6,2 > z_1(2,2) = 3.$

Pro firmu T-MOBILE je dominující kombinace strategií (1,3), protože:

$z_2(1,3) = 6,2 > z_2(2,2) = 3.$

Body (3,1) a (1,3) tedy dominují bodu (2,2).

V případě, že by se firmy nedohodly, mohly by být výsledkem jejich rozhodnutí kombinace s přínosy pro oba nevýhodnými. To vyplývá z tabulky zisků obou společností, viz Tabulka 4.16.

Rovnovážný bod	Zisk VODAFONE	Zisk T-MOBILE	Suma zisků
(1,1)	1	1	2
(3,3)	1	1	2

Tabulka 4.16: Nedohoda firem

Pokud změníme zadání tak, že upravíme prostředky na reklamu na 7, 8 a 12 mil. Kč a růst tržeb při nákladech na reklamu nad 20 mil. Kč z 200 mi. Kč na 310 mil. Kč při podílech 45% ku 55%, 35% ku 65%, resp. 40% ku 60%, matice výher by pak měly tvar, který je uveden v Tabulce 4.17:

Strategie VODAFONE	Zisk VODAFONE			Zisk T-MOBILE		
	Strategie T-MOBILE			Strategie T-MOBILE		
	1.	2.	3.	1.	2.	3.
1.	3	2	-1	3	3	0
2.	2	2	0	2	2	0
3.	0	0	3,5	-1	0	3,5
	Matice A			Matice B		

Tabulka 4.17: Rovnovážné body

Úloha má jeden dominující rovnovážný bod (3,3). Pokud tedy obě firmy vynaloží 12 mil. Kč na reklamu, bude zisk každé z nich 3,5 mil. Kč.

Řešený příklad:

Město Opava vyhlásilo soutěž na prodej atraktivních pozemků v centru města za účelem výstavby obchodního centra, z jehož provozu získá 100 mil. Kč ročně na daních. Problémem je ale postoj několika stávajících majitelů pozemků, kteří požadují za odkoupení 50 mil. Kč, zatímco město nabízí pouze 20 mil. Kč. Protože hrozí odstoupení investora od smlouvy, nabízí město, pokud oba ustoupí, 30 mil. Kč. V následující Tabulce 4.18 je uvedena matice výher pro dvě strategie T, která znamená trvat na svém a strategii U, což je ochota ke kompromisu.

		Výnos města Ostrava		Výnos majitelé	
		Strategie majitelů		Strategie majitelů	
		T	U	T	U
Strategie města Ostrava	T	0	80	0	20
	U	50	70	50	30

Tabulka 4.18: Matice výher

Ze zadání úlohy je zřejmé, že pro oba subjekty bude výhodný kompromis. Pokud by subjekty trvaly na svém, znamenalo by to odstoupení investora.

4.6. Kooperativní hry

V reálném životě se často vyskytují situace, kdy je vhodné, aby se účastníci rozhodovací situace dohodli na společné volbě strategie. Ale navíc také dopředu uzavřeli dohodu o rozdělení výhry, kterou společně získají. V prvním kroku musejí hráči odpovědět na základní otázku, zda je pro ně vůbec výhodné takovou dohodu uzavírat. Hráči se dohodnou pouze tehdy, pokud vzájemnou spoluprací mohou dosáhnout vyšší výhry, než pokud zvolí své strategie individuálně.

První hráč může dosáhnout výhru o velikosti:

$$z_1 = \max_i \min_j z_1(i, j), \tag{4.22}$$

a druhý hráč pak výhru:

$$z_2 = \max_j \min_i z_2(i, j). \tag{4.23}$$

Hráči potom mohou také vypočítat, jakou společnou výhru by získali v případě uzavření dohody:

$$z_{1,2} = \max_{i,j} \left(z_1(i, j) + z_2(i, j) \right). \tag{4.24}$$

Řešený příklad:

Dvě rafinerské firmy Unipetrol a Čepro se rozhodují, zda budou dodávat pohonné hmoty na trh přímými dodávkami (strategie 1), s využitím služeb distributora (strategie 2) nebo kombinací obou předchozích metod (strategie 3). Protože se jedná o zastupitelné produkty a zákazníci (čerpací stanice) oceňují také úroveň dodavatelských služeb, ovlivňuje volba strategií vzájemně i jejich tržby v mld. tak, jak je uvedeno v následující Tabulce 4.19:

		Tržby Unipetrol			Tržby Čepro			max *j*	(*i*,*j*)
		Strategie Čepro			Strategie Čepro				
		1.	2.	3.	1.	2.	3.		
Strategie Unipetrol	1.	2,0	2,1	2,9	2,0	1,8	1,8	2,0	(1,1)
	2.	1,0	2,0	2,0	2,9	4,0	2,0	4,0	(2,2)
	3.	1,0	2,0	2,5	2,0	2,5	2,9	2,9	(3,3)
max *i*		2,0	2,1	2,9					
(*i*,*j*)		(1,1)	(1,2)	(1,3)					

Tabulka 4.19: Matice tržeb v mil. Kč

Naše hra má pouze jediný sedlový bod (1, 1). Při volbě první strategie by oba konkurenti použili přímé distribuce pohonných hmot a oba získali tržby 2 mld. Kč. Z Tabulky 4.19 ale také vyplývá, že pro obě firmy by bylo rovněž výhodné využít služeb některé distribuční společnosti, která jim může díky vysoké úrovni služeb zajistit tržby v celkové výši 2+4=6 mld. Kč.

V případě, že platí nerovnost $z_{12} > z_1 + z_2$, je potom výhodné pro obě firmy spolupracovat. Takovýto typ kooperativních her se v literatuře obvykle označuje jako hry podstatné. V případě, že platí rovnost $z_{12} = z_1 + z_2$, hovoříme o nepodstatných hrách.

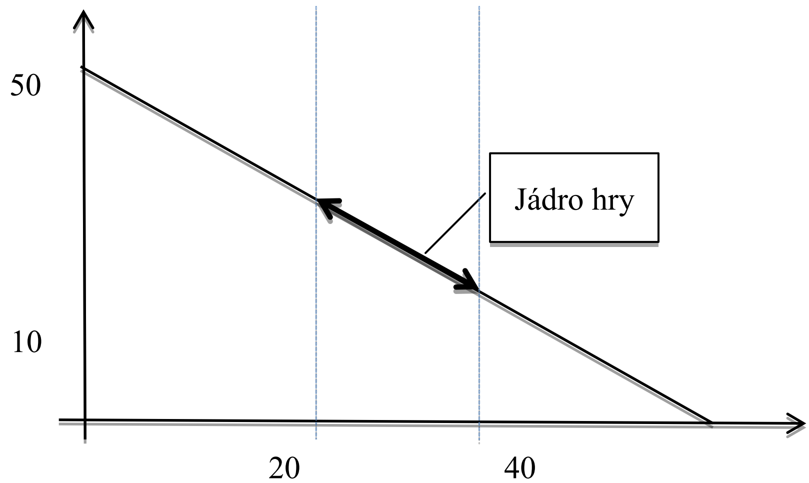
V případě, že se hráči nedohodnou na způsobu rozdělení výhry, došlo by de facto k nahrazení jednoho konfliktu druhým. Z tohoto důvodu bývá obvykle součástí dohody mezi hráči také způsob rozdělení výhry. Výhry obou hráčů jsou představovány dvěma čísly a_1 a a_2. Pomocí těchto čísel lze určit podíly jednotlivých hráčů na celkové výhře. Pro oba spolupracující hráče bude obvykle výhodné rozdělení výhry, pro které platí:

$$z_{12} = a_1 + a_2, \qquad (4.25)$$

kde $a_1 \geq z_1$, $a_2 \geq z_2$.

Množina všech rozdělení vyhovující oběma podmínkám tvoří jádro hry. Problémem je skutečnost, že jádro hry obsahuje opět množinu bodů, při hře dvou hráčů jsou to body úsečky ve tvaru:

$$a_2 = z_{12} - a_1. \qquad (4.26)$$



Obrázek 4.4: Jádro hry

Hráči si mohou dosaženou výhru rozdělit na základě různých principů:

a) O výhru se podělí rovným dílem, jedná se o tzv. charitativní princip, platí tedy:

$$a_1 = a_2 = z_{12} / 2. \tag{4.27}$$

b) Jiným možným způsobem rozdělení dosažené výhry je rozdělení, kdy si každý z hráčů ponechá výhru, kterou by získal bez dohody s konkurentem a zbylá část výhry je pak rozdělena v poměru přínosu obou hráčů do společné výhry dle následujícího vztahu:

$$\begin{aligned} a_1 &= z_1 + \; z_{12} - z_1 - z_2 \quad z_{12} - z_2 \; / \; z_{12} - z_1 \; , \\ a_2 &= z_2 + \; z_{12} - z_1 - z_2 \quad z_{12} - z_1 \; / \; z_{12} - z_2 \; . \end{aligned} \tag{4.28}$$

c) Anebo se o zbytek výhry rozdělí rovným dílem:

$$\begin{aligned} a_1 &= z_1 + \; z_{12} - z_1 - z_2 \; / 2, \\ a_2 &= z_2 + \; z_{12} - z_1 - z_2 \; / 2. \end{aligned} \tag{4.29}$$

4.7. Nekonečné hry dvou hráčů

V reálné praxi jsou však případy, kdy si hráči volí pouze jednu strategií z několika variant, spíše výjimkou. V případě, že chceme stanovit hodnoty výher pro víc strategií, které mají charakter spojité proměnné, je možné problém vyřešit tak, že zvolíme příslušné diskrétní hodnoty a pro ně pak vypočítáme dosažitelné výhry.

Podstatou nekonečných her je tedy hledání řešení v situacích, kdy každý z účastníků hry může přijímat teoreticky nekonečně mnoho strategií. Podobnou situaci jsme už řešili v případě smíšeného rozšíření maticových her, v kapitolách 4.3 a 4.4, kdy vektor možných řešení obsahoval pravděpodobnosti, které nabývaly libovolných hodnot z intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

Pokud budeme předpokládat, že příslušné matice strategií obou hráčů $X_1 = \; x_{1i}$ a $X_2 = \; x_{2i}$ budou obsahovat teoreticky nekonečně mnoho prvků, je zřejmé, že nenalezneme univerzální postup, jak získat řešení takové hry. Je to způsobeno několika důvody. Jednak řešení bude ovlivňovat skutečnost, zda množiny strategií budou mít charakter spojitých množin euklidovského prostoru nebo množiny diskrétních hodnot, ale zároveň také skutečnost, že ve většině případů nebudeme moci pracovat s maticemi výher z_1 a z_2, ale s výplatními funkcemi. Ty pak budou vyjadřovat závislost výher jednotlivých hráčů na zvolených strategiích protihráčů.

Vzhledem k tomu, že budeme opět hledat takové kombinace strategií, které maximalizují výhry příslušných hráčů, bude mít na hledání řešení her také jejich matematický tvar. Bude tedy důležité, zda se jedná o funkce konkávní nebo konvexní, spojité či diskrétní.

V teorii nekonečných her byly formulovány několik nutných a postačujících podmínek pro to, aby příslušná hra měla řešení:

a) množiny strategií musí být kompaktní a konvexní množiny,

b) výplatní funkce musí být konkávní atd.

Ani tyto teoretické poznatky nějaký jednotný způsob hledání optimálních strategií nenabízejí. U maticových her naopak důkaz existence řešení v případě jejich smíšeného rozšíření dával zároveň návod na jejich řešení.

Nyní si nekonečnou hru dvou hráčů obecně popíšeme. Předpokládejme, že dva hráči, například dvě konkurenční firmy soupeří svými zaměnitelnými výrobky teoreticky až na n segmentech trhu s možným objemem tržeb t_i, jsou schopny na marketing a celkovou podporu prodeje utratit částky K_1 a K_2, a potřebují se rozhodnout, jaké částky x_{1i} a x_{2i} pro i=1,2,…,n vynaložit v jednotlivých segmentech teoreticky nekonečného trhu takovým způsobem, aby získali co největší podíl na celkových tržbách:

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i. \qquad (4.30)$$

Pro x_{1i} a x_{2i} logicky platí, že $\sum_{i=1}^{n} x_{1i} = K_1$ a $\sum_{i=1}^{n} x_{2i} = K_2$. Jinými slovy, každý podnik může vyčerpat pouze prostředky, které má k dispozici. Jedná se tedy opravdu o hru s nekonečným počtem strategií, protože platí: $x_{1i} \in \langle 0, K_1 \rangle, x_{2i} \in \langle 0, K_2 \rangle$ a součet výher T je konstantní. Budeme dále předpokládat, že oba hráči jsou schopní efektivně vynakládat prostředky na podporu prodeje, jinými slovy, za své prostředky získají na každém trhu podíl odpovídající podílu částek, které v daném segmentu vynaložili. Můžeme tedy například zapsat, že když např. v i-tém segmentu vynaloží:

a) první hráč x_{1i} Kč, získá tržby ve výši $\dfrac{x_{1i} t_i}{x_{1i} + x_{2i}}$, (4.31)

b) druhý hráč x_{2i} Kč, získá tržby ve výši $\dfrac{x_{2i} t_i}{x_{1i} + x_{2i}}$, (4.32)

pak celkový objem tržeb obou hráčů lze zapsat jako:

a) $z_1\ x_1, x_2\ = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_{1i}}{x_{1i} + x_{2i}} = t_i$, v případě prvního hráče, (4.33)

b) $$z_2(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{2i}}{x_{1i} + x_{2i}} = t_i, \text{ v případě druhého hráče,} \quad (4.34)$$

přičemž musí platit: $z_1(x_1, x_2) + z_2(x_1, x_2) = T.$ (4.35)

Naší úlohu je možné také převést na hru s nulovým součtem výher:

$$z = z_1 - z_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i} - x_{2i}}{x_{1i} + x_{2i}} = t_i. \quad (4.36)$$

Abychom zajistili, že funkce z je definovaná pro všechny případy, musíme položit její hodnotu rovnu nule pro $x_{1i} = x_{2i} = 0$. Interpretace této podmínky je relativně triviální. Pokud neutratí na *í*-tém trhu oba hráči žádnou částku, rozdělí se o možné tržby rovným dílem.

Další krok analýzy spočívá v nalezení optimální strategie obou hráčů. Pro oba hráče jsou logicky atraktivní trhy s vysokým tržním potenciálem, protože vysoký tržní podíl na těchto trzích znamená vysoké tržby. Z toho plyne, že jako jedna z možných strategií se jeví ta, při které by každý hráč rozdělil své omezené prostředky v poměru podílu příslušného trhu na celkových tržbách. Potom by vektory strategií obou hráčů obsahovaly tyto prvky:

$$\begin{aligned} x_1 &= (t_1 K_1 / T, t_2 K_1 / T, \ldots, t_n K_1 / T), \\ x_2 &= (t_1 K_2 / T, t_2 K_2 / T, \ldots, t_n K_2 / T). \end{aligned} \quad (4.37)$$

V dalším kroku dokážeme, zda jsou nalezené strategie optimální či nikoliv. V případě, že se jedná o strategie optimální, musí platit, stejně jako v případě maticových her, že pokud se první hráč odchýlí od své optimální strategie a druhý hráč ji zvolí, bude výhra prvního hráče menší, než v případě, kdy oba hráči zvolí svou optimální strategii. A ta bude menší než v situaci, kdy první hráč zvolí optimální strategii a druhý se od ní odchýlí. Můžeme tedy zapsat:

$$z_1(x_1, x_2^{opt.}) \le z_2(x_1^{opt.}, x_2^{opt.}) \le z_1(x_1^{opt.}, x_2). \quad (4.38)$$

Podrobné odvození a také matematický důkaz lze nalézt v Gros (2003). Z výsledků odvození vyplývá, že podniky by měly vkládat prostředky na podporu prodeje na jednotlivé trhy úměrně jejich velikosti.

Řešený příklad:

V tomto řešeném příkladu se soustředíme na případ dvou konkurenčních podniků, u něhož lze najít logickou úvahou řešení nekonečné hry a jeho oprávněnost následně dokázat. Uvažujme dvě konkurenční firmy, podnikající v oboru strojírenství, OSTROJ OPAVA a VÍTKOVICE MACHINERY, které se se rozhodují o rozdělení částek 20, resp. 30 mil. Kč na podporu prodeje na třech významných trzích v Rusku, Brazílii a Indii s očekávanými tržbami 200, 250 a 220 mil. Kč. Naším úkolem bude navrhnout optimální rozdělení prostředků na jednotlivých trzích.

Pokud budeme postupovat podle vztahů (4.37) a (4.38), zjistíme, že optimální rozdělení prostředků bude následující:

OSTROJ OPAVA:

$$x_{11} = 20.200/670 = 6,$$
$$x_{12} = 20.250/670 = 7,5,$$
$$x_{13} = 20.220/670 = 6,5.$$

VÍTKOVICE MACHINERY:

$$x_{21} = 30.200/670 = 9,$$
$$x_{22} = 30.250/670 = 11,$$
$$x_{23} = 30.220/670 = 10.$$

4.8. Nekooperativní hry o *n* hráčích

Teorie her se zabývá také hrami o více než dvou hráčích. V této podkapitole se budeme zabývat hrami v normálním tvaru, jichž se účastní více než 2 racionální hráči, kteří usilují o dosažení maximální výhry. U těchto her už není nutné rozlišovat hry s konstantní a proměnlivou sumou výher, a to z toho důvodu, že různorodost zájmů více hráčů nenutí hráče čelit jednotnému tlaku ostatních protihráčů.

V případě těchto her bude vektor strategií *n* hráčů ve tvaru $x^r = \; x_1^r, x_2^r, ..., x_n^r$ rovnovážným bodem hry v případě, že pro všechna $i = 1, 2, ..., n$ a všechna $x_i \in X_i$ budou platit tyto nerovnosti:

$$z_i \;\; x_1^r, x_2^r, ..., x_{i-1}^r, x_i^r, x_{i+1}^r, ..., x_n^r \;\; \le z_i \;\; x_1^r, x_2^r, ..., x_{i-1}^r, x_i^r, x_{i+1}^r, ..., x_n^r \;\; , \tag{4.39}$$

kde x_i^r jsou rovnovážné strategie hráčů a X_i prostor přípustných strategií.

Ze vztahu (4.39) opět vyplývá, že pokud se *i*-tý hráč odchýlí od své optimální strategie a ostatní protihráči ji zvolí, bude výhra *i*-tého hráče nižší, než kdyby také on zvolil optimální strategii. V případě, že nalezneme jediný rovnovážný bod, pak je volba strategií vyřešena. V případě, že takový bod nenalezneme, je třeba nalézt dominující rovnovážný bod $x_{dom.}^r$, pro který platí:

$$z_i \;\; x_{dom.}^r \;\; \ge z_i \;\; x^r \;\; , \tag{4.40}$$

kde x^r jsou libovolné rovnovážné body hry.

Pokud je tento bod jediný, nalezli jsme jednoznačné řešení hry. V případě, že tomu tak není, hledáme, zda existují záměnné rovnovážné body. To jsou takové body, které udávají stejnou hodnotu výhry při různých kombinacích strategie, jež byly použity v dané skupině rovnovážných bodů.

Celý problém hledání optimálních strategií v případě her s více než dvěma hráči tedy závisí na tom, jak se obecné principy řešení těchto her podaří aplikovat na konkrétní situace tak, aby objem a složitost nutných výpočtů byl úměrný dosaženému efektu.

Řešený příklad:

Tři prodejci pohonných hmot v Opavě firmy Shell, Agip a Benzina usilují o maximalizaci zisku na trhu s denní kapacitou 50 000 hl pohonných hmot měsíčně. Průměrná cena pohonných hmot závisí na celkovém dodaném množství na trh, a to podle následujícího vztahu:

$$p = 100 - 0{,}015(x_1 + x_2 + x_3).$$

Fixní a variabilní náklady prodejců pohonných hmot včetně jejich prodejních kapacit jsou uvedeny v Tabulce 4.20.

Prodejce	Fixní náklady	Variabilní náklady	Prodejní kapacita
Shell	100 000	250	20 000
Agip	80 000	225	20 000
Benzina	90 000	275	20 000

Tabulka 4.20: Matice tržeb v mil. Kč

Ziskové funkce jednotlivých prodejců mají následující tvar:

$$z_{SHELL} = \left(100 - 0{,}015(x_1 + x_2 + x_3)\right)x_1 - 250x_1 - 100000,$$

$$z_{AGIP} = \left(100 - 0{,}015(x_1 + x_2 + x_3)\right)x_2 - 225x_2 - 80000,$$

$$z_{BENZINA} = \left(100 - 0{,}015(x_1 + x_2 + x_3)\right)x_3 - 275x_3 - 90000.$$

Součtovou funkci celkového zisku pak můžeme zapsat v tomto tvaru:

$$z_{CELKOVY} = z_{SHELL} + z_{AGIP} + z_{BENZINA}.$$

K této ziskové funkci musíme připojit soustavu omezujících podmínek:

$$x_1 \leq 20000;\ x_2 \leq 20000;\ x_3 \leq 20000,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50000.$$

Pro řešení této úlohy použijte nástroj *Řešitel.* Úlohu vyřešte samostatně.

4.9. Hry proti přírodě

Celá řada rozhodovacích situací je ovlivňována kromě racionálních subjektů rovněž řadou náhodných vlivů. V případě, že je množina strategií racionálního hráče konečná a je možné také náhodné stavy, které ovlivňují celkový výsledek hry formulovat jako konečnou množinu, pak je možné sestavit matici výher A typu (m, n). Řádky této matice budou odpovídat přijatým strategiím racionálního hráče a sloupce pak možným náhodným hodnotám náhodné veličiny, strategiím indiferentního hráče.

Určení optimální strategie v takovýchto rozhodovacích situacích při rozhodování za rizika, případně nejistoty, závisí na několika faktorech. Především pak na povaze hráče, zejména na jeho ochotě přijmout různou míru rizika, ale také na charakteru modelové situace a intenzitě vlivu náhodného jevu na výsledek rozhodnutí V neposlední řadě pak závisí na míře dostupných informací, které má hráč k dispozici v situaci, kdy se snaží kvantifikovat náhodné vlivy:

a) V případě, že je známo pravděpodobnostní rozdělení, s nímž může dojít k náhodným stavům, hodnoty $p(i)$ j-tého náhodného jevu, můžeme použít Bayesova kritéria, které je založeno na maximalizaci střední hodnotu výhry racionálního účastníka:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p \; j = \max_i \; \bar{a}_{ij} \; . \tag{4.41}$$

b) Jestliže se nepodaří kvantifikovat hodnoty $p(i)$, je možné předpokládat, že všechny výskyty náhodných jevů mají stejnou pravděpodobnost, která se rovná poměru $1/n$. V takovém případě lze použít Laplaceovo kritérium:

$$\max_i \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{n} . \tag{4.42}$$

c) Pokud je hráč konzervativně založený, je možné použít Waldovo pesimistické kritérium:

$$\max_i \min_j a_{ij} . \tag{4.43}$$

d) Poslední zvolený přístup, tzv. Savageovo kritérium, je založeno na minimalizaci ztrát z_{ij} :

$$z_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} , \tag{4.44}$$

jež vyjadřují ztrátu, která je spojena s přijetím i-té strategie ve srovnání s volbou za předpokladu, že bychom znali skutečné hodnoty náhodné proměnné. Volíme proto strategii, pro kterou platí:

$$\min_i \max_j z_{ij}. \tag{4.45}$$

e) Poslední často používané kritérium je tzv. Hurwitzovo kritérium, které umožňuje hráči pomocí volitelného tzv. ukazatele optimismu $a \in \langle 0,1 \rangle$ vyjádřit jeho postoj k riziku. Hledáme proto takovou kombinaci strategií, která zajistí výhru ve výši:

$$\max_i \left(a \max_j a_{ij} + 1-\alpha \ \min_j a_{ij} \right). \tag{4.46}$$

Čím více se hodnota α blíží hodnotě 1, tím větší riziko je ochoten hráč postoupit a tím více je optimističtější ve svém odhadu výskytu náhodného faktoru.

Řešený příklad:

Restaurace s letní zahrádkou se rozhoduje, jaké množství piva má objednat na následující víkend. Analýzou stejných období v minulých týdnech se podařilo sestavit tabulku rozdělení pravděpodobnosti prodeje piva v hl, viz Tabulka 4.21.

Prodej v *hl*	12	15	17	20	22
Pravděpodobnost *p*(i)	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Tabulka 4.21: Rozdělení pravděpodobností

Cena 1 hl piva je 4000 Kč. Variabilní náklady jsou 1000 Kč/hl, fixní náklady jsou 20 000 Kč za období. Pokud se objedná více piva, prodá se přebytek se ztrátou 500 Kč/hl. Pokud se projeví nedostatek piva, je nutné jej doobjednat. Tím pak vzrostou variabilní náklady na 1500 Kč/hl a fixní na 25 000 Kč za období. Matice výher obsahuje vypočtený rozdíl mezi tržbami a náklady.

Objednávky v hl	Náhodná poptávka v hl					Průměrná poptávka	min *i*	max *j*
	12	15	17	20	22			
12	16	18,5	23,5	31	36	27,25	16	36
15	11,5	25	25	32,5	40,5	30,75	11,5	40,5
17	8,5	22	31	33,5	38,5	31,25	8,5	38,5
20	4	18,5	26,5	40	40	31,25	4	40
22	1	14,4	23,5	37	46	30,225	1	46
max	16	25	31	40	46			

Tabulka 4.22: Matice zisků v tis. Kč

V polích Tabulky 4.22 je vytvořený zisk v tis. Kč. Kalkulace zisku při objednání 20 hl piva a spotřeby 22 hl je následující:

Tržby celkem:	22 . 4 000 = 88 000 Kč
Variabilní běžné náklady:	20 . 1000 = 20 000 Kč
Variabilní zvýšené náklady:	2 . 1500 = 3000 Kč
Fixní zvýšené náklady:	25 000 Kč
Náklady celkem:	48 000 Kč

Zisk a_{34} : 88 000 – 48 000 = 40 000 Kč

V další Tabulce 4.23 jsou vypočteny hodnoty $a_{ij}\,p\quad j$:

	$p\quad j$	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,p\quad j$
	Spotřeba	12	15	17	20	22	
Objednávky v hl	12	1,6	3,7	4,7	12,4	3,6	26
	15	1,15	5	5	13	4,05	28,2
	17	0,85	4,4	6,2	13,4	3,85	28,7
	20	0,4	3,7	5,3	16	4	29,4
	22	0,1	2,88	4,7	14,8	4,6	27,08

Tabulka 4.23: Hodnoty očekávaného zisku při použití Bayesova kritéria

Při použití Bayesova kritéria zvolíme max (26; 28,2; 28,7; 29,4; 27,08), tedy hodnotu 29,4, což znamená, že bychom měli objednat 20 hl piva.

Při použití Laplaceova kritéria je v Tabulce 4.22 ve třetím sloupci zprava sloupci vypočten prostý průměr z hodnot zisku v příslušných řádcích. Pokud z nich vybereme max (27,25; 30,75; 31,25; 31,25; 30,225), tedy hodnotu 31,25, znamená to, že bychom měli objednat 17 nebo 20 hl piva.

Waldovo kritérium znamená najít maximum z minim z hodnot v předposledním sloupci v Tabulce 4.22, tedy max (16; 11; 8,5; 4; 1), což znamená, že by bylo vhodné objednat 12 hl piva.

Pro aplikaci Savageova kritéria jsou v Tabulce 4.24 vypočteny ztráty z_{ij}. Pro jejich výpočet použijeme vybraná maxima ve sloupcích v posledním řádku Tabulky 4.22.

Objednávky v hl	Náhodná poptávka v hl					max i
	12	15	17	20	22	
12	0	6,5	7,5	9	10	10
15	4,5	0	6	7,5	5,5	7,5
17	7,5	3	0	6,5	7,5	7,5
20	12	6,5	4,5	0	6	12
22	15	10,6	7,5	3	0	15

Tabulka 4.24: Matice ztrát při použití Savageova kritéria

Podle Savageova kritéria by bylo vhodné objednat 15 nebo 17 hl piva.

Příklad výpočtu podle Hurwitzova kritéria ukážeme na předpokladu, že hráč zvolí a=0,7, viz Tabulka 4.25. Maxima a minima v řádcích jsou uvedeny v Tabulce 4.22.

12	0,7*36 + (1-0,7)*16 = 30
15	0,7*40,5 + (1-0,7)*11,5 = 31,8
17	0,7*38,5 + (1-0,7)*8,5 = 29,5
20	0,7*40 + (1-0,7)*4 = 29,2
22	0,7*46 + (1-0,7)*1 = 32,5

Tabulka 4.25: Výběr strategie při použití Hurwitzova kritéria

Také při mírném optimismu by bylo vhodné objednat 22 hl piva.

5. Matematický dodatek

V matematickém dodatku se zaměříme pouze na jedno téma, a to maticový počet. Znalosti o maticovém počtu jsme totiž využívali především v kapitole 1 a kapitole 2. Kromě obecných matematických postupů budou uvedeny příklady využití maticového počtu pomocí nástrojů v prostředí MS Excel 2010.

5.1. Maticový počet

Jedním z nejvhodnějších prostředků, jimiž lze vyjádřit ekonomické závislosti, je maticová neboli také vektorová symbolika. Matici A je možné definovat jako obdélníkové schéma reálných čísel z R, které jsou uspořádané v m řádcích a n sloupcích. V takovém případě hovoříme, že matice A je typu $m \times n$. Prvek matice A umístěný v i-tém řádku a j-tém sloupci označujeme a_{ij}. Matici A pak zapisujeme takto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{m3} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Nyní si vysvětlíme některé pojmy a operace, které se často v maticovém počtu používají:

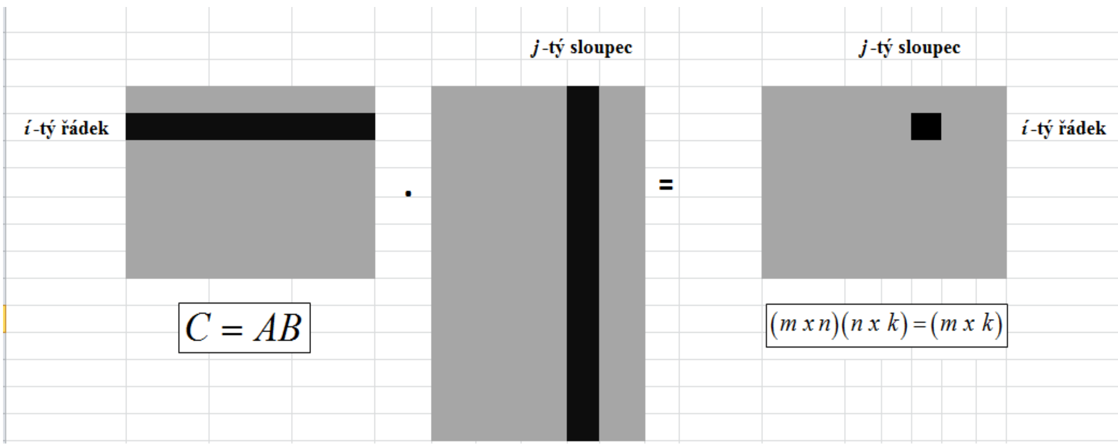
1. Matice A se nazývá maticí čtvercovou, jestliže je $m = n$. Řádky a sloupce matice A se nazývají vektory. V některých případech může být matice A sestavena jen z jednotlivého řádkového vektoru anebo z jednotlivého sloupcového vektoru. V takovém případě si vystačíme s jediným indexem prvku matice. Například $A = (a_1, \ldots, a_n)$ je řádkový vektor. Jsou-li rovněž všechna $a_{ii} = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, pak A nazýváme nulovou maticí a označujeme ji *0*. Jednotková nebo také identická matice E je pak matice, pro níž platí, že $a_{ij} = 1$ pro $i = j$, $a_{ij} = 0$ pro i a j.
2. Transponovanou matici k matici A označujeme symbolem A^T a vznikne tak, že přemístíme prvek v i, j pozici matice A na prvek v pozici j, i. Jinými slovy, vzájemně vyměníme řádky a sloupce matice A zrcadlově kolem hlavní diagonály a získáme tak matici A^T.
3. Dvě matice označujeme jako shodné, pokud se jejich odpovídající prvky rovnají.
4. Symetrická matice je matice, pro kterou platí $A = A^T$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechna i a j.

5. Nechť $A = \{ a_{ij} \}$, $B = \{ b_{ij} \}$ jsou matice typu $m \; x \; n$. Matice A je nezáporná, píšeme $A \geq 0$, jestliže $a_{ij} \geq 0$ pro všechna $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$. Matice A je naopak kladná, píšeme $A > 0$, jestliže $a_{ij} > 0$ pro všechna i a j.
6. Platí také $A \geq B$, pokud současně platí $a_{ij} \geq b_{ij}$ pro všechna $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$.
7. Matice $C = \{ c_{ij} \}$ je součtem matic A a B, tj. $C = A + B$, jestliže platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro všechna $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$.
8. Pro součet matic stejného typu platí známé komutativní, asociativní a distributivní zákony, stejně jako pro sečítání reálných čísel. Skalární násobek matice $A = \{ a_{ij} \}$ je matice, jejíž všechny prvky jsou rovny součinu každého prvku z A s konstantou $\alpha \in R$, tj. $\alpha A = \{ \alpha a_{ij} \}$.
9. Nechť $A = \{ a_{ij} \}$ je matice typu $m \; x \; n$, $B = \{ b_{jk} \}$ je matice typu $n \; x \; r$. Matice $C = c_{ik}$, typu $m \; x \; r$, je součinem matic A a B, tj. $C = A.\ B$, jestliže platí:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \tag{5.2}$$

pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, r$.

Prvek výsledné matice C, která vznikla součinem matic A a B v i-tém řádku a k-tém sloupci je skalárním součinem dvou vektorů, a to i-tého řádku matice A a k-tého sloupce matice B, viz Obrázek 5.1. Pro součin matic v případě, že počet sloupců matice A je stejný, jako počet řádků matice B, platí stejné asociativní a distributivní zákony jako pro násobení reálných čísel.



Obrázek 5.1: Schéma násobení matic

Matice vznikly historicky jako zjednodušující metoda řešení systému lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ &.. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Řešení takových rovnic je jednodušší v případě, že koeficienty a_{ij} jsou odděleny od neznámých x_j. Pak je možné rovnici (5.3) lze zapsat v následujícím tvaru:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{m3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Pokud označíme vektor $x = \; x_1, x_2, ..., x_n \;^T$ jako sloupcový vektor a totéž učiníme v případě $b = \; b_1, b_2, ..., b_m \;^T$, je možné systém lineárních rovnic (5.4), který označujeme jako nehomogenní systém *m* lineárních rovnic o *n* neznámých, zapsat v jednoduchém tvaru takto:

$$Ax = b. \tag{5.5}$$

Inverzní matice A^{-1} ke čtvercové matici A typu $n \, x \, n$ má následující vlastnost: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Pomocí inverzní matice tak můžeme získat řešení rovnice (5.5) ve tvaru:

$$x = A^{-1}b. \tag{5.6}$$

Jestliže $b = 0$, pak nenulové řešení homogenní soustavy $Ax = 0$ existuje, právě tehdy když neexistuje A^{-1} , jinak $x = A^{-1}0 = 0$ je jediným řešením. Matice A^{-1} neexistuje, právě tehdy když determinant A je roven nule.

Řešený příklad:

1. Vypočítejte součin matic.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & + & 2.2 & + & 3.3 \\ 4.1 & + & 5.2 & + & 6.3 \\ 7.1 & + & 8.2 & + & 9.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{bmatrix}$$

2. Vypočítejte součin matic.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \ + \ 2.2 \ + \ 3.3 & 1.3+2.2+3.1 \\ 4.1 \ +5.2 \ + \ 6.3 & 4.3+5.2+6.1 \\ 7.1 \ +8.2 \ + \ 9.3 & 7.3+8.2+9.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 32 & 28 \\ 50 & 46 \end{bmatrix}$$

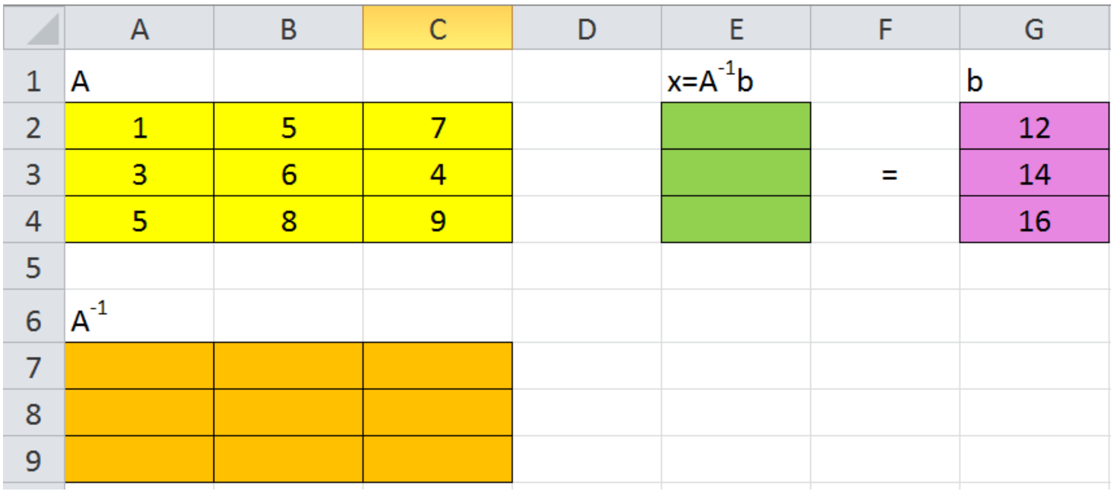
3. Pomocí maticových funkcí řešte v prostředí MS Excelu 2010 soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 14 \\ 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 16 \end{aligned}$$

Ekvivalentní soustava v maticovém tvaru vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

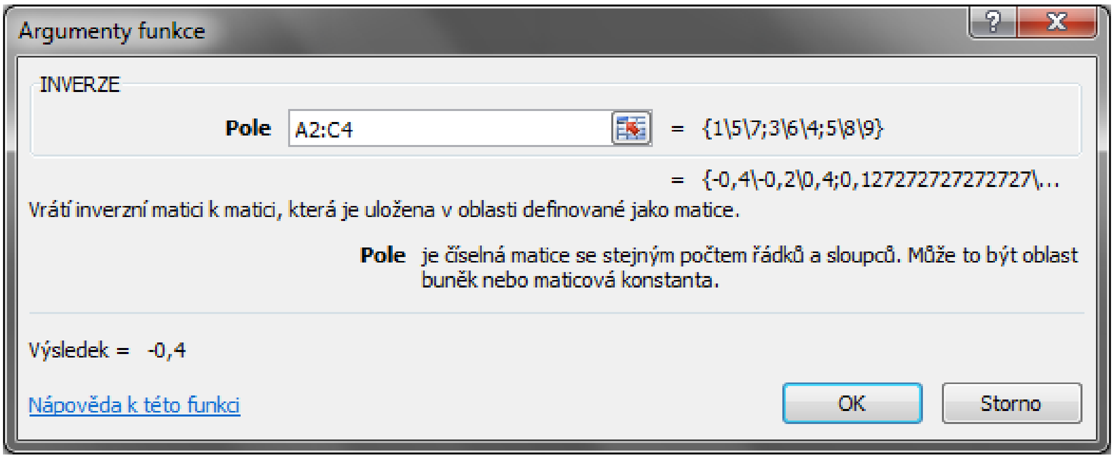
Na pracovním listu v prostředí MS Excel 2010 si připravíme data, viz Obrázek 5.2:



	A	B	C	D	E	F	G
1	A				$x=A^{-1}b$		b
2	1	5	7				12
3	3	6	4			=	14
4	5	8	9				16
5							
6	A^{-1}						
7							
8							
9							

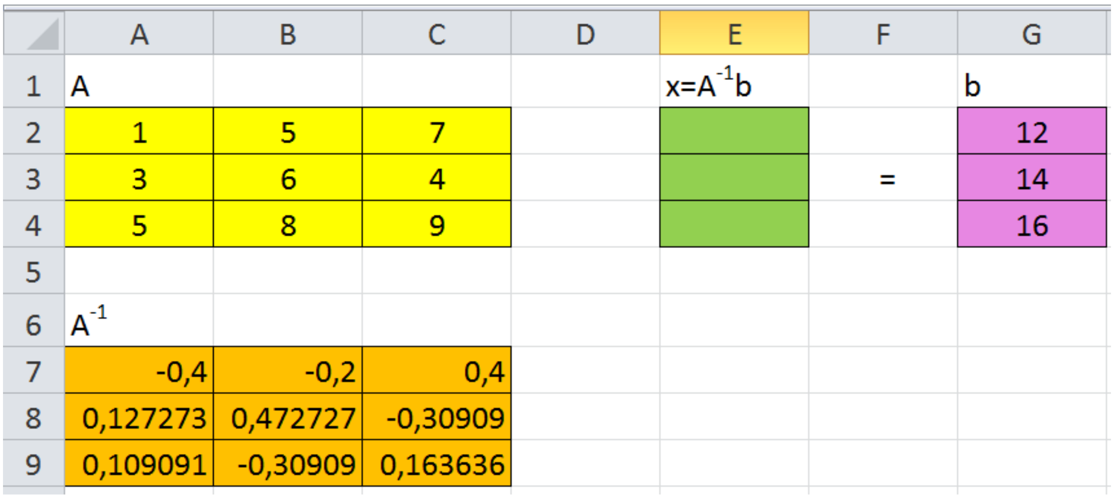
Obrázek 5.2: Příprava dat v prostředí MS Excel – verze 2010

Dále je nutné označit pole, kde má být uložena inverzní matice A^{-1} k matici soustavy A, v našem případě se jedná o pole A7:C9. V dalším kroku vložíme funkci pro výpočet inverzní matice v menu: *Vložit* → *Funkce* → → *Matematické* → *INVERZE*, viz Obrázek 5.3. Otevře se zadávací okno:



Obrázek 5.3: Funkce INVERZE v prostředí MS Excel – verze 2010

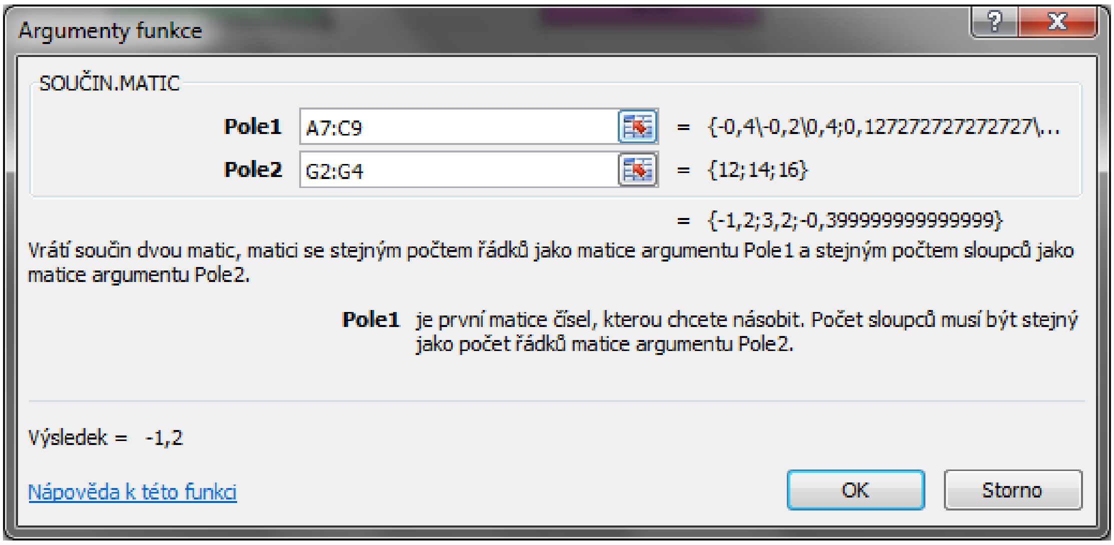
V okně *Argumenty funkce* vložíme pole, kde je uložena matice A, tj. A2:C4, potvrdíme tlačítkem *OK* za současného stisku kláves *Shift+Ctrl*! V poli A7:C9 pro inverzní matici se objeví výsledek, viz Obrázek 5.4:



	A	B	C	D	E	F	G
1	A				x=A⁻¹b		b
2	1	5	7				12
3	3	6	4			=	14
4	5	8	9				16
5							
6	A⁻¹						
7	-0,4	-0,2	0,4				
8	0,127273	0,472727	-0,30909				
9	0,109091	-0,30909	0,163636				

Obrázek 5.4: Výsledek oprace INVERZE v prostředí MS Excel – verze 2010

Nakonec vyřešíme soustavu rovnic s pomocí maticového řešení: $x = A^{-1}b$. Nejprve označíme buňky pro vektor řešení x, tj. pole E2:E4. V dalším kroku vložíme funkci pro výpočet součinu matic: *Vložit* → *Funkce* → *Matematické* → *SOUČIN.MATIC*. Otevře se zadávací okno *Argumenty funkce*, viz Obrázek 5.5:



Obrázek 5.5: Funkce SOUČIN.MATIC v prostředí MS Excel – verze 2010

V okně *Argumenty funkce* vložíme pole, kde jsou uloženy matice A^{-1}a b pro součin, tj. A7:C9 a G2:G4, pak potvrdíme tlačítkem *OK* za současného stisku kláves *Shift+Ctrl* ! V poli E2:E4 pro neznámý vektor *x* se objeví výsledek:

	A	B	C	D	E	F	G
1	A				x=A^{-1}b		b
2	1	5	7		-1,2		12
3	3	6	4		3,2	=	14
4	5	8	9		-0,4		16
5							
6	A^{-1}						
7	-0,4	-0,2	0,4				
8	0,127273	0,472727	-0,30909				
9	0,109091	-0,30909	0,163636				

Obrázek 5.6: Výsledek operace *SOUČIN.MATIC* v prostředí MS Excel – verze 2010

Řešením soustavy rovnic je tedy vektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ = (-1,2; 3,2; -0,4). Zkoušku správnosti výsledku je možné provést násobením původní matice *A* a vektoru *x*.

Výsledný součin matice *A* a vektoru *x*, v našem případě se jedná o vektor, je roven vektoru pravých stran soustavy *b*.

6. Seznam literatury

Anderson, D. R., Sweeney, D. J. a Williams, T. A. (1994). *Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making.* New York: West Publishing.

Gros, I. (2003). *Kvantitativní metody v manažerském rozhodování.* Praha: Grada Publishing.

Hilier, F. S. a Lieberman, G. J. (2004). *Introduction to Operations Research.* New York: McGraw-Hill Science/Engineering/Math.

Ivaničová, Z. a Brezina I. (1997). *Kvantitatívne metódy pro manažérov.* Bratislava: Iura Edition.

Jablonský, J. (2007). *Operační výzkum.* Praha: Professional Publishing.

Jablonský, J. (2007). *Programy pro matematické modelování.* Praha: Oeconomica.

Maier, G. a Tödling, F. (1997). *Teória lokalizácie a priestorová štruktúra.* Bratislava: Elita.

Maňas, M. (2002). *Teorie her a konflikty zájmů.* Praha: Oeconomica.

Morgenstern, O. a von Neumann, J. (2004). *Theory of Games and Economic Behavior.* New Jersey: Princeton University.

Pelikán, J. (2001). *Diskrétní modely v operačním výzkumu.* Praha: Professional Publishing.

Wagner, H. M. (1969). *Principles of Operations Research.* New Jersey: Prentice Hall.

7. Rejstřík

U

V