Slezská univerzita v Opavě
Matematický ústav v Opavě

Vybrané partie z matematické analýzy I – Diferenciální počet funkcí více proměnných

Karel Hasík

Petra Kordulová

a Zdeněk Kočan

Opava 2013

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Slezská univerzita v Opavě
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hrazeno z prostředků projektu OPVK CZ.1.07/2.2.00/15.0174
Inovace bakalářských studijních oborů se zaměřením na spolupráci s praxí

Obsah

Předmluva

Tento studijní materiál vznikl na základě přednášek, které v uplynulých letech navštěvovali studenti bakalářských oborů Matematického ústavu Slezské univerzity v Opavě v rámci předmětu Vybrané partie z matematické analýzy.

Studijní text je určen posluchačům bakalářského studia oborů Matematické metody v ekonomice a Aplikovaná matematika při řešení krizových situací. Nemusí být tedy zcela postačující pro studenty odborného studia matematiky. Jedná se o látku, kterou by měli studenti zvládnout obvykle v průběhu zimního semestru druhého ročníku.

Naší snahou bylo už v tomto textu poskytnout studentům také dostatek příkladů, jejichž prostudování by jim umožnilo lépe pochopit probíranou látku. Nicméně i přesto jsme usoudili, že k důkladnému procvičení nabytých teoretických poznatků se lépe hodí studijní text přímo určený k tomuto účelu. To vedlo ke vzniku sbírky řešených příkladů, která vhodně doplňuje tento studijní materiál a kterou tímto doporučujeme studentům ke studiu.

Věříme, že naše snaha pomoci studentům lépe zvládnout látku z diferenciálního počtu funkcí více proměnných bude úspěšná.

Stručný náhled studijní opory

Námi vytvořený studijní materiál pokrývá základy učiva, které se probírá v diferenciálním počtu funkcí více proměnných. Pro studium předpokládáme znalost diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné a některé pojmy z lineární algebry a geometrie.

Látka je členěna do desíti kapitol. V těchto kapitolách se student seznámí nejdříve ze základními pojmy, jako je definiční obor funkce, graf funkce, vrstevnice apod. Poté jsou studovány další důležité vlastnosti funkcí, mezi které patří existence limity funkce v daném bodě a spojitost funkce v daném bodě. Poté výklad pokračuje kapitolami věnovanými existenci parciálních a později také směrových derivací funkce v daném bodě, což jsou pojmy zobecňující pojem obyčejné derivace funkce jedné proměnné na n-rozměrný případ. Velmi důležitý je pro funkce více proměnných pojem diferenciál funkce, který je probírán ve čtvrté kapitole. V souvislosti s touto problematikou jsou dále odvozeny vztahy pro derivování složených funkcí a funkcí daných implicitně.

Celý výklad směřuje, podobně jako u funkcí jedné proměnné k tomu, abychom získali o chování funkcí co nejpřesnější představu. K tomu je zapotřebí zkoumat také extrémní hodnoty funkcí, což je problematika, které jsou věnovány poslední tři kapitoly. V těchto kapitolách se seznámíme s vyšetřováním volných a vázaných extrémů funkcí více proměnných. Výklad látky je uzavřen v kapitole věnované globálním extrémům.

Na konci každé kapitoly je série příkladů a kontrolních otázek, které mají studentům pomoci s procvičením prostudované látky. Některé kapitoly obsahují příklady, jejichž řešení je rozděleno do několika fází se snahou provést studenta řešením příkladu krok po kroku v případě, že mu dané učivo působí obtíže. Dále je na konci každé z kapitol ještě kontrolní test, který dává studentům možnost ověřit, do jaké míry učivu porozuměli. Výjimkou z tohoto pravidla je problematika věnovaná extrémům funkcí více proměnných. Zde byly testovací otázky spolu s testem zařazeny až za poslední kapitolu pojednávající o globálních extrémech.

1 Funkce n proměnných

Klíčová slova. Definiční obor funkce, vrstevnice, graf funkce, okolí, otevřená množina, uzavřená množina.

1.1 Základní pojmy

V přírodních vědách se daleko častěji setkáváme se závislostí dané veličiny na hodnotách několika veličin než se závislostí na pouze jedné veličině. Z tohoto důvodu je účelné mít k dispozici matematický aparát, který by nám umožňoval takové závislosti studovat. Na základě požadavku přírodních věd se tedy přirozeně dostáváme k potřebě zobecnit znalosti z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné na vícerozměrný případ. Příkladem veličiny, jejíž hodnota závisí na více než jedné proměnné, je např. výpočet indexu tělesné hmotnosti značeného BMI (Body Mass Index), který je používán ke klasifikaci podváhy, nadváhy či obezity. BMI index je funkcí tělesné výšky a hmotnosti a je dán vztahem

$$BMI = \frac{\text{váha(kg)}}{\text{výška}^2\text{(m)}}.$$

Dalšími klasickými příklady funkcí více proměnných jsou vztahy pro výpočet objemu třírozměrných těles jako jsou kvádr, jehož objem je funkcí délek stran ($V = xyz$), nebo válec, jehož objem je dán poloměrem podstavy a výškou ($V = \pi r^2 h$). Jsme přesvědčeni, že řadu dalších příkladů je čtenář bez obtíží schopen uvést sám.

Při zkoumání funkčních závislostí nás vždy jako první zajímá množina hodnot, na které má smysl tuto závislost uvažovat. V případě funkcí jedné proměnné byla jejím definičním oborem vždy nějaká množina reálných čísel, nejčastěji interval, popř. sjednocení intervalů. Není těžké nahlédnout, že prvky definičního oboru vícerozměrné závislosti nebudou čísla, ale spíše skupiny čísel, které je navíc nutné nějakým způsobem uspořádat. Domníváme se, že intuitivně je nyní zřejmé, jak budeme funkce více proměnných chápat. Korektní zavedení příslušných pojmů je předmětem následující definice.

Definice 1.1. Množinu

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{[x_1, x_2, \ldots, x_n]; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme ***n*-rozměrným reálným prostorem**. **Bodem** v n-rozměrném reálném prostoru nazýváme uspořádanou n-tici reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Píšeme $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$.
Dále nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak každé zobrazení $f : M \mapsto \mathbb{R}$ (množiny M do množiny $\mathbb{R}$) nazýváme **reálnou funkcí** n **reálných proměnných**. Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a značíme ji symbolem $\mathcal{D}f$.

Z uvedené definice vyplývá, že funkce f je vlastně pravidlo, které přiřazuje každému bodu $X \in M$ právě jedno číslo $y \in \mathbb{R}$. Dvěma různým n-ticím je samozřejmě možné přiřadit totéž číslo $y_1 = y_2$. Obraz bodu $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ označujeme symbolem $f(X)$, popř. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

V dalším budeme zejména v příkladech často pracovat s funkcemi dvou a tří proměnných. Vzhledem k tomu, že v těchto případech jsou prvky množiny $\mathcal{D}f$ dvojice, resp. trojice reálných čísel, můžeme je chápat jako kartézské souřadnice bodů v rovině, resp. v prostoru. Při tomto pojetí získáváme o funkcích dvou a tří proměnných názornou geometrickou představu, protože na ně pohlížíme jako na zobrazení, která přiřazují bodu v rovině či prostoru nějaké reálné číslo. Pro funkce dvou a tří proměnných budeme místo označení $f(x_1, x_2)$, resp. $f(x_1, x_2, x_3)$ používat označení $f(x, y)$, resp. $f(x, y, z)$.

Poznámka 1.2. Pokud se v dalším textu setkáme s funkcí, která bude zadána bez udání definičního oboru, budeme množinou $\mathcal{D}f$ rozumět množinu právě těch bodů $X \in \mathbb{R}^n$, pro které funkce $f(X)$ nabývá reálných hodnot. Zejména tedy u funkcí, které jsou dány nějakým vzorcem, budeme definiční obor chápat jako množinu všech bodů, pro které má daný vzorec smysl.

Příklad 1.3. Najděte definiční obor funkcí

1. $f(x, y) = \frac{1}{x+y-2}$
2. $f(x, y) = \sqrt{3x + 2y - 3}$
3. $f(x, y) = \ln(x - y^2)$
4. $f(x, y) = \frac{\sqrt{3x+2y-3}}{\ln(x-y^2)}$

Řešení.

1. Funkce je definovaná pro $\forall x, y$ splňující podmínku $x + y - 2 \neq 0$. Definičním oborem této funkce je tedy celé $\mathbb{R}^2$, až na body ležící na přímce $y = -x + 2$. Definiční obor je znázorněn na obrázku 1, přičemž přerušovanou čarou jsou znázorněny body, které do definičního oboru nepatří. Pokud bude v dalším zapotřebí znázornit příslušnost určitých bodů k definičnímu oboru, budeme používat plnou čáru.

2. Tato funkce je definovaná pro taková x, y, která vyhovují nerovnosti $3x + 2y - 3 \geq 0$. Uvedená nerovnost popisuje body ležící na přímce nebo nad přímkou $y = \frac{3}{2}(1 - x)$. Definičním oborem je tedy „horní" polorovina $\mathbb{R}^2$ vymezená danou přímkou (viz obrázek 2).

3. Víme, že funkce logaritmus je definovaná pro kladné hodnoty. Body ležící v definičním oboru funkce $\ln(x - y^2)$ musí splňovat nerovnost $x - y^2 > 0$, která vymezuje body ležící nad grafem paraboly $x = y^2$ (bráno z pohledu ve směru osy x) (viz obrázek 3).

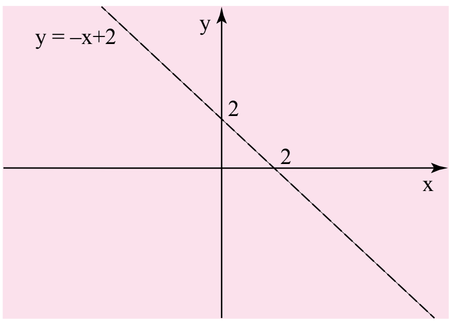
4. Při řešení využijeme výsledků dvou předcházejících příkladů. Definiční obor hledané funkce by mohl být průnikem definičních oborů v bodech 2 a 3, kdybychom nemuseli ještě vzít v úvahu skutečnost, že funkce logaritmus se tentokrát vyskytuje ve jmenovateli, a tudíž musí platit $\ln(x - y^2) \neq 0$. Toto je splněno tehdy, jestliže platí $x - y^2 \neq 1$. Z definičního oboru je tedy ještě nutné vynechat body ležící na parabole $x = y^2 + 1$ (viz obrázek 4).

Stanovení definičního oboru je první základní informací, kterou se snažíme o dané funkci získat. Z kapitoly o vyšetřování průběhu funkce jedné proměnné víme, že další důležité poznatky o zkoumané funkci získáme, pokud se nám podaří nakreslit její graf.

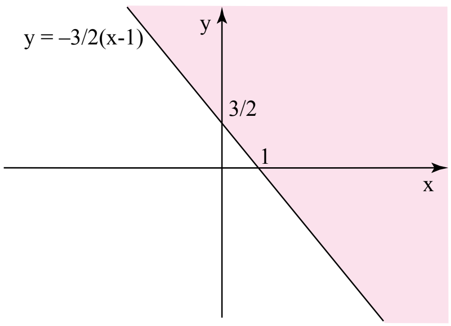
Definice 1.4. Je-li f funkce dvou proměnných definovaná na množině M, pak **grafem** funkce f nazýváme množinu bodů tvaru

$$G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; [x, y] \in M, z = f(x, y)\}.$$

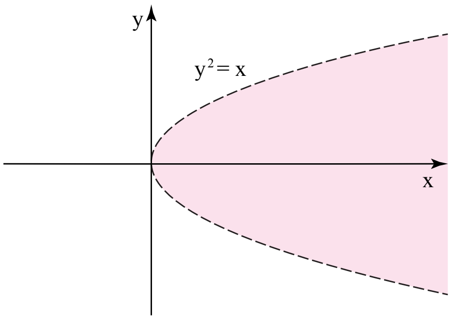
Na základě definice 1.4 vidíme, že ačkoli by bylo možné pojem graf funkce



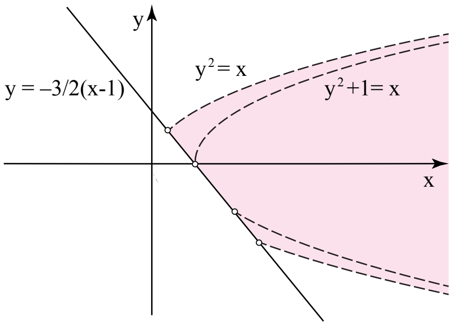
Obrázek 1: Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{1}{x+y-2}$



Obrázek 2: Definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{3x+2y-3}$



Obrázek 3: Definiční obor funkce $f(x,y) = \ln(x-y^2)$



Obrázek 4: Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{3x+2y-3}}{\ln(x-y^2)}$

zavést i pro funkce tří a více proměnných, postrádá takové zobecnění praktický význam. Pro znázornění grafu funkce potřebujeme totiž vždy prostor, jehož dimenze je o jednu vyšší než dimenze definičního oboru funkce. Vzhledem k naší omezenosti na třírozměrný prostor jsme schopni geometricky znázornit pouze grafy funkcí dvou proměnných.

V dalším uvidíme, že nakreslení grafu funkce dvou proměnných je mnohem obtížnější záležitost než tomu bylo u funkcí jedné proměnné. V této souvislosti se ukazuje jako užitečný pojem úrovňová křivka neboli vrstevnice, který se používá v geografii.

Definice 1.5. **Úrovňovými křivkami** neboli **vrstevnicemi** funkce f dvou proměnných rozumíme množiny bodů tvaru:

$$v_k = \{[x, y] \in \mathcal{D}f; f(x, y) = k\},$$

kde k je daná reálná konstanta.

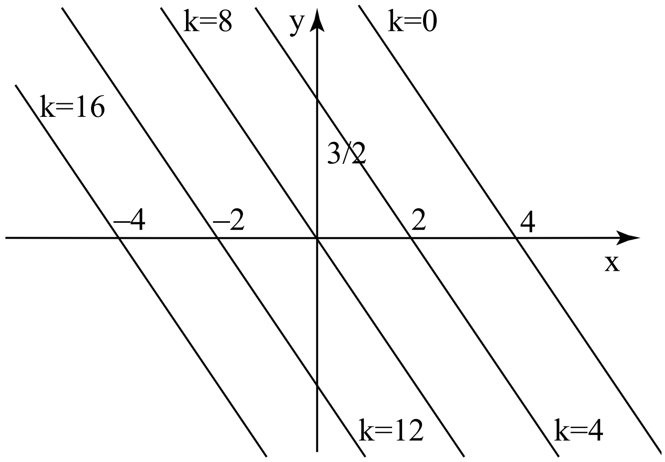
Pomocí vrstevnic, tj. jistých křivek v rovině, můžeme tedy určit, kde má graf funkce f výšku k. Je vhodné si uvědomit, že definice připouští i zápornou výšku, což je u klasických vrstevnic, na něž jsme zvyklí z kartografie, velmi zřídkavý jev. Jestliže se nám podaří získat tvar vrstevnic dané funkce a tyto vrstevnice znázorníme tak, že je pozvedneme o danou výšku k do prostoru, získáme v řadě případů dobrou představu o jejím grafu.

Příklad 1.6. Znázorněte v rovině xy vrstevnice funkce $f(x, y) = -2x-y+8$ pro hodnoty $k = 0, 4, 8, 12, 16$.

Řešení. Vrstevnicemi jsou v tomto případě přímky $-2x - y + 8 = k$. Jejich grafické znázornění můžeme vidět na obrázku 5.

Grafem funkce je rovina $z = -2x - y + 8$, jejíž část vidíme znázorněnu na obrázku 6. Přímka, ve které graf funkce protíná rovinu xy, je vrstevnice funkce pro $k = 0$. Touto vrstevnicí je přímka $y = -2x + 8$.

Čtenář si z kapitoly o vyšetřování průběhu funkcí jedné proměnné jistě pamatuje, že okamžité získání grafu funkce na základě funkčního předpisu je možné jen v těch nejjednodušších případech. V těch zbývajících je zapotřebí shromáždit o zkoumané funkci celou řadu dalších informací s využitím znalostí pojmů limita, spojitost, derivace apod. Zavedení těchto pojmů, resp. jejich analogií pro funkce více proměnných bude předmětem následujících kapitol.



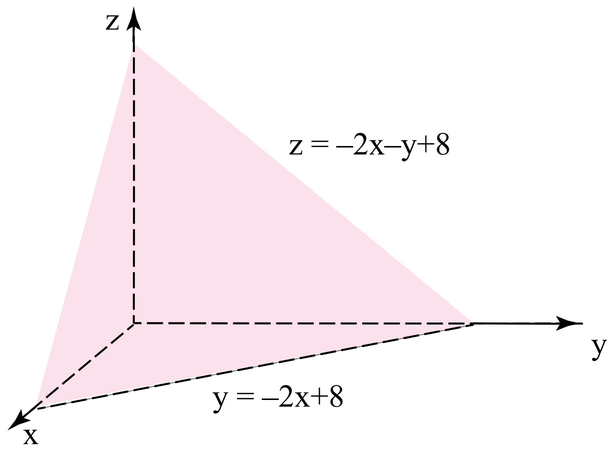
Obrázek 5: Vrstevnice funkce $f(x, y) = -2x - y + 8$

Abychom ovšem vůbec mohli tyto pojmy zavést, je zapotřebí provést přípravné kroky. Společným rysem pojmů limita, spojitost, popř. derivace je jejich lokální charakter. Máme-li být schopni zkoumat např. existenci limity či derivace funkce více proměnných v daném bodě, musíme mít prostředky pro popis chování dané funkce v dostatečné blízkosti tohoto bodu. Za tímto účelem byl u funkcí jedné proměnné zaveden pojem okolí bodu. Připomínáme, že δ-okolí vlastního bodu x^* lze v $\mathbb{R}$ popsat jako množinu bodů danou vztahem

$$|x - x^*| < \delta, \quad \text{kde} \quad \delta > 0.$$

Jedná se tedy o interval $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ se středem v bodě x^*.

Okolí daného bodu v $\mathbb{R}$ je tedy množina bodů, jejichž vzdálenost od tohoto bodu je menší než zvolené kladné číslo δ. Chceme-li analogickým způsobem zavést pojem okolí ve vícerozměrném reálném prostoru, vyvstává před námi potřeba definovat pojem vzdálenosti v $\mathbb{R}^n$. Dostáváme se tak k následující definici.



Obrázek 6: Graf funkce $f(x, y) = -2x - y + 8$

Definice 1.7. Vzdáleností (metrikou) v n-rozměrném prostoru nazýváme funkci ρ, která libovolným dvěma bodům x, y z $\mathbb{R}^n$ přiřazuje nějakým způsobem jejich vzdálenost $\rho(x, y)$ tak, že jsou splněny následující axiomy:

- $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\rho(x, y) \geq 0$, přičemž $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^n$ platí $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Jestliže se zamyslíme nad tím, jak chápeme pojem vzdálenost v běžném životě, vidíme, že všechny vlastnosti dané předcházející definicí jsou zcela přirozené. První vlastnost jednoduše říká, že vzdálenost je vždy kladná, jestliže ji měříme mezi dvěma různými body. Druhá vlastnost stanovuje požadavek symetrie, tj. to, aby „cesta“ z bodu x do bodu y byla stejně dlouhá jako cesta zpět. Třetí vlastnost, které se také říká trojúhelníková nerovnost, popisuje následující: pohybuji-li se z bodu x do bodu z přes bod y, musím urazit alespoň takovou vzdálenost, jako kdybych se pohyboval z bodu x do bodu z přímo.

Vlastnosti popsané v definici 1.7 může splňovat celá řada funkcí. Typickým příkladem je vztah udávající tzv. euklidovskou vzdálenost mezi dvěma body, která je v $\mathbb{R}^n$ definována následovně

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

kde $x = [x_1, ..., x_n]$ a $y = [y_1, ..., y_n]$, kterou můžeme interpretovat jako délku úsečky spojující dané dva body v $\mathbb{R}^n$. Existují i jiné způsoby, jak definovat vdálenost, např. pomocí maximové či součtové metriky. V dalším ale budeme vzdálenost chápat v euklidovském pojetí. Nyní tedy můžeme přistoupit k zavedení pojmu okolí v $\mathbb{R}^n$.

Definice 1.8. Množinu všech bodů prostoru $\mathbb{R}^n$, jejichž euklidovská vzdálenost od daného bodu x^* je menší než dané číslo $\delta > 0$, nazýváme **δ-okolím** bodu x^* a značíme jej $\mathcal{O}(x^*, \delta)$, popř. jen $\mathcal{O}(x^*)$, pokud δ není podstatné.
Množinu $\mathcal{P}(x^*, \delta) = \mathcal{O}(x^*, \delta) \setminus \{x^*\}$ nazýváme **prstencovým (redukovaným, ryzím) okolím** bodu x^*.

Jestliže si uvědomíme, že vzdálenost bodů chápeme jako délku úsečky, která tyto body spojuje, snadno nahlédneme, že δ-okolí bodu x^* v prostoru $\mathbb{R}^2$ je vnitřek kružnice o poloměru δ se středem v bodě x^*. Obdobně v prostoru $\mathbb{R}^3$ se jedná o vnitřek koule o poloměru δ se středem v bodě x^*.

Pojem okolí používáme k přesnějšímu popisu lokálních vlastností funkce, tj. takových vlastností, které si funkce zachovává v určité blízkosti daného bodu, ale obecně na celém svém definičním oboru je mít nemusí. V dalším využijeme okolí k zavedení pojmů vnitřní, vnější a hraniční bod podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^n$ a dále pojmů otevřená a uzavřená množina v $\mathbb{R}^n$.

Definice 1.9. Bod $x^* \in \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **vnitřní bod** množiny $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když existuje $\mathcal{O}(x^*)$ takové, že $\mathcal{O}(x^*) \subseteq \Omega$;
- **vnější bod** množiny $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když existuje $\mathcal{O}(x^*)$ takové, že $\mathcal{O}(x^*) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$;
- **hraniční bod** množiny $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když pro každé $\mathcal{O}(x^*)$ platí $\mathcal{O}(x^*) \cap \Omega \neq \emptyset \wedge \mathcal{O}(x^*) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \neq \emptyset$.

Příklad 1.10. Určete vnitřní, vnější a hraniční body kruhu s daným středem a poloměrem.

Řešení. Uvažujme pro určitost kruh o poloměru 1 se středem v počátku. Pak

1. všechny body, jejichž vzdálenost od počátku je rovna d_1, přičemž platí $d_1 < 1$, jsou jeho vnitřními body. Ke každému takovému bodu můžeme totiž sestrojit δ-okolí ležící uvnitř kruhu, jestliže zvolíme $\delta < 1 - d_1$;

2. všechny body, které mají vzdálenost od počátku $d_2 > 1$, jsou vnějšími body tohoto kruhu. Ke každému takovému bodu můžeme totiž sestrojit δ-okolí ležící vně kruhu, jestliže zvolíme $\delta < d_2 - 1$;

3. zbývají tedy už jen všechny body kružnice o poloměru $r = 1$ se středem v počátku. Tyto body jsou nutně hraničními body daného kruhu. Proč?

Je zřejmé, že provedené úvahy platí pro libovolný kruh s daným poloměrem r i středem S. V provedených úvahách stačí nahradit číslo 1 symbolem r a slovo počátek slovem střed kruhu.

Poznámka 1.11. Z příkladu vyplývá, že každé okolí je otevřenou množinou, neboť se jedná o vnitřek kruhu o daném poloměru, což odpovídá první možnosti z předcházejícího příkladu.

Definice 1.12. Množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **otevřená**, právě když každý její bod je vnitřním bodem;
- **uzavřená**, právě když obsahuje všechny své hraniční body.

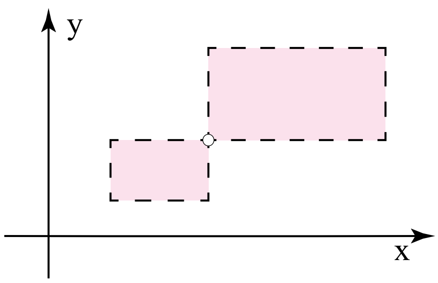
Neprázdná otevřená množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **souvislá**, právě když každé dva její body lze spojit lomenou čarou, jejíž všechny body leží v Ω. Množinu, která je neprázdná, otevřená a souvislá, nazýváme **oblastí**. **Uzavřenou oblastí** pak nazýváme množinu, která vznikne jako sjednocení oblasti s množinou všech jejích hraničních bodů.

Příklad 1.13.

1. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$. Dvojrozměrný interval, tj. množina tvaru $I_2 = \{[x, y]; a < x < b, c < y < d\}$, je zřejmě otevřenou a souvislou množinou. Jedná se tedy o oblast. Pokud bychom nahradili ostré nerovnosti neostrými, vznikla by uzavřená oblast.

2. Každé δ-okolí nějakého bodu v $\mathbb{R}^2$ je otevřená a souvislá množina bodů, tj. je oblastí. Přidáme-li k němu hraniční kružnici, vznikne uzavřená oblast.

3. Uvažujme vnitřky dvou obdélníků, které se dotýkají v jednom z vrcholů (viz obrázek 7). Tato množina není oblastí, protože není souvislá. Pokud přidáme společný vrchol obdélníků k této množině, dostaneme souvislou množinu, ale ne oblast, protože výsledná množina není ani uzavřená, ani otevřená.



Obrázek 7:

1.2 Úlohy k samostatnému řešení a kontrolní otázky

Cvičení 1.1. Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{1}{3x+2y-6}$.

Cvičení 1.2. Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \ln(x^2 - 6y + 2)$.

Cvičení 1.3. Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{x + y - 1}$.

Cvičení 1.4. Nakreslete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Cvičení 1.5. Nakreslete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{xy - 1}$.

Cvičení 1.6. Nakreslete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Cvičení 1.7. Nakreslete některé vrstevnice a pokuste se popsat útvar, který je grafem funkce $f(x, y) = -x + y + 2$.

Cvičení 1.8. Nakreslete vrstevnice a graf funkce $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

Cvičení 1.9. Najděte vnitřní, vnější a hraniční body definičních oborů funkcí ve cvičeních 1.4–1.6.

Cvičení 1.10. Je některý z definičních oborů funkcí ve cvičeních 1.1–1.6 oblastí?

Otázka 1.1. Jak je definovaná reálná funkce n proměnných?

Otázka 1.2. Definujte pojem graf funkce dvou proměnných.

Otázka 1.3. Jaké informace nám o funkci dávají vrstevnice?

Otázka 1.4. Dokážete uvést příklad dvou různých funkcí, jejichž vrstevnice jsou kvalitativně stejné křivky (přímky, kružnice,.....)?

Otázka 1.5. Uveďte příklad množiny, která není ani uzavřená ani otevřená.

Otázka 1.6. Existuje podmnožina v $\mathbb{R}^n$, která je zároveň otevřená i uzavřená?

Otázka 1.7. Je jednobodová množina v $\mathbb{R}^n$otevřená nebo uzavřená?

Otázka 1.8. Je průnik nebo sjednocení otevřených množin opět otevřená množina? (Nápověda: odpověď může být jiná podle toho, zda uvažujeme konečný či nekonečný systém množin.)

Otázka 1.9. Je průnik nebo sjednocení uzavřených množin opět uzavřená množina? (Nápověda: odpověď může být jiná podle toho, zda uvažujeme konečný či nekonečný systém množin.)

Otázka 1.10. Uveďte příklad funkcí, jejichž definiční obor je

(a) otevřená množina;

(b) uzavřená množina.

1.3 Výsledky úloh k samostatnému řešení

Cvičení 1.1. Celé $\mathbb{R}^2$ kromě bodů ležících na přímce $3x + 2y - 6 = 0$.

Cvičení 1.2. Body v $\mathbb{R}^2$ ležící pod grafem paraboly $y = (1/6)x^2 + 1/3$.

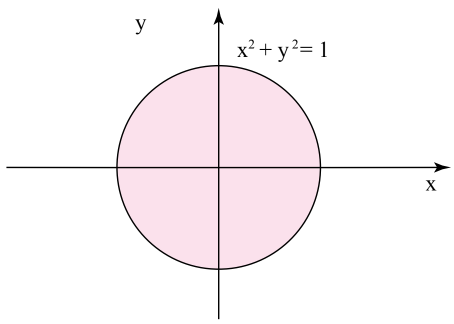
Cvičení 1.3. Body v $\mathbb{R}^2$ ležící nad přímkou a na přímce $y = 1 - x$.

Cvičení 1.4. viz obrázek 8

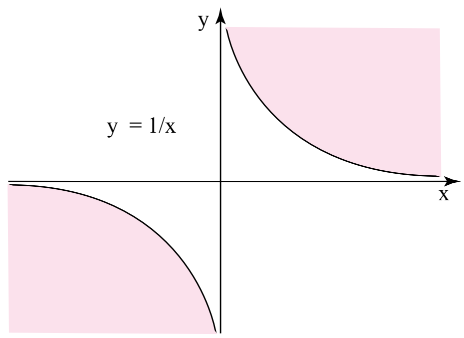
Cvičení 1.5. viz obrázek 9

Cvičení 1.6. viz obrázek 10

Cvičení 1.7. viz obrázek 11



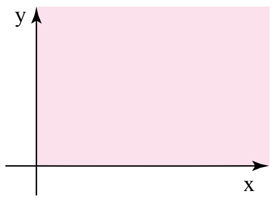
Obrázek 8: Definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



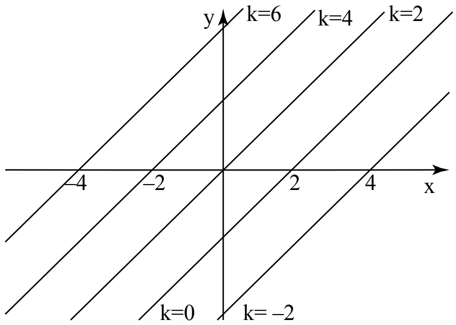
Obrázek 9: Definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{xy - 1}$

Cvičení 1.8. Elipsy se středem v počátku, jejichž hlavní poloosa má dvojnásobnou délku ve srovnání s vedlejší poloosou a leží v ose x, a počátek pro $k = 0$.

Cvičení 1.9.
Vniřní body: vnitřek kružnice $x^2 + y^2 = 1$; body ležící nad, resp. pod grafem funkce $y = 1/x$ v prvním, resp. třetím kvadrantu; body v prvním kvadrantu mimo os x a y.
Hraniční body: kružnice $x^2 + y^2 = 1$; větve hyperboly $y = 1/x$; počátek, kladná poloosa x a y.
Vnější body: body ležící vně kružnice $x^2 + y^2 = 1$; body ležící „mezi“ větvemi hyperboly $y = 1/x$; body ležící ve druhém, třetím a čtvrtém kvadrantu, které mají alespoň jednu souřadnici zápornou.



Obrázek 10: Definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$



Obrázek 11: Vrstevnice funkce $f(x,y) = -x + y + 2$

Cvičení 1.10. Oblastí je definiční obor funkce v příkladu 1.2. V ostatních příkladech je porušena podmínka souvislosti nebo otevřenosti.

1.4 Kontrolní test

Start testu **Základní pojmy**

1. Která z následujících množin představuje definiční obor funkce dané vztahem $f(x,y) = \frac{1}{2x+y-1}$?

☐ $A = \{[x,y]; 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$
☐ $B = \{[x,y]; 2x + y - 1 \neq 0\}$
☐ $C = \{[x,y]; x + 2y - 1 \leq 0\}$

2. Definičním oborem funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{x+1}$ je množina

☐ všech bodů ležících uvnitř kružnice o poloměru 2 se středem v počátku, které neleží na přímce $x = -1$
☐ všech bodů ležících uvnitř a na kružnici o poloměru 2 se středem v počátku
☐ všech bodů ležících uvnitř a na kružnici o poloměru 2 se středem v počátku, které neleží na přímce $x = -1$

3. Definičním oborem funkce $f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x}$ je množina

☐ všech bodů v rovině, které mají první souřadnici různou od nuly
☐ všech bodů v rovině, které mají první souřadnici různou od nuly a platí pro ně $|y| \leq |x|$
☐ všech bodů v rovině, které mají první souřadnici různou od nuly a platí pro ně $-x \leq y \leq x$

4. Definičním oborem funkce $f(x,y,z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$

☐ koule o poloměru 4 se středem v počátku
☐ horní polovina koule o poloměru 4 se středem v počátku
☐ dolní polovina koule o poloměru 4 se středem v počátku

5. Vrstevnicemi funkce $f(x,y) = y^2 - x$ jsou

☐ paraboly, jejichž osou je osa x
☐ paraboly, jejichž vrchol leží na ose x
☐ paraboly, jejichž osou je osa y

6. Vrstevnicemi funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x$ jsou

☐ kružnice se středem v bodě $[2,0]$ a tento bod
☐ kružnice se středem v bodě $[0,2]$ a tento bod

☐ kružnice se středem v bodě $[-2, 0]$ a tento bod

7. Vlastnosti metriky jsou ekvivalentní s vlastnostmi reálné funkce definované na množině $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, která

☐ libovolné dvojici různých bodů přiřazuje nenulovou hodnotu, libovolné dvojici stejných bodů přiřazuje nulovou hodnotu, je symetrická a splňuje trojúhelníkovou nerovnost

☐ libovolné dvojici stejných bodů přiřazuje nulovou hodnotu, je nezáporná, symetrická a splňuje trojúhelníkovou nerovnost

☐ libovolné dvojici různých bodů přiřazuje kladnou hodnotu, libovolné dvojici stejných bodů přiřazuje nulovou hodnotu, je symetrická a splňuje trojúhelníkovou nerovnost

8. Prstencovým okolím bodu $x^* \in \mathbb{R}^n$ rozumíme

☐ množinu všech bodů, jejichž vzdálenost od bodu x^* je menší než dané kladné číslo

☐ každou otevřenou množinu obsahující bod x^*

☐ množinu všech bodů různých od x^*, jejichž vzdálenost od bodu x^* je menší než dané kladné číslo

9. Množina $A = \{[x, y]; 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$

☐ je otevřená

☐ je uzavřená

☐ není ani otevřená ani uzavřená

10. Hraničními body množiny $B = \{[x, y]; x \neq 0, y > 0\}$ jsou

☐ všechny body ležící na ose x a nezáporné polose y kromě počátku

☐ všechny body ležící na ose x a nezáporné polose y

☐ body ležící na osách x a y

Konec testu | Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek:

Procento úspěšnosti:

2 Limita a spojitost

Klíčová slova. Hromadný bod, izolovaný bod, limita, spojitost.

2.1 Limita a spojitost funkce

Pojem limity funkce dvou a více proměnných je obdobný pojmu limity funkce jedné proměnné. Limita funkce je lokální vlastnost, charakterizuje chování funkce v ryzím okolí bodu, v němž limitu určujeme. V této kapitole definujeme pojmy limita a spojitost pro funkci dvou proměnných. Pro funkce tří a více proměnných definujeme tyto pojmy zcela analogicky.

Definice 2.1. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina a $P \in \mathbb{R}^2$ je bod.
a) Bod P se nazývá **hromadný bod** množiny M, jestliže každé jeho ryzí okolí $\mathcal{P}(P)$ obsahuje alespoň jeden bod množiny M, tj. $\mathcal{P}(P) \cap M \neq \emptyset$.
b) Bod P se nazývá **izolovaný bod** množiny M, jestliže existuje jeho okolí $\mathcal{O}(P)$ takové, že kromě bodu P neobsahuje žádné jiné body množiny M, tj. $\mathcal{O}(P) \cap M = \{P\}$.

Poznámka 2.2. Hromadný bod množiny M může, ale nemusí v množině M ležet. Izolovaný bod množiny M leží v množině M a je jejím hraničním bodem.

Definice 2.3. Nechť f je funkce dvou proměnných. Řekneme, že funkce f má v hromadném bodě $P = [x_0, y_0]$ svého definičního oboru $\mathcal{D}f$ **limitu** $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý bod $X = [x, y]$, $X \in \mathcal{P}(P) \cap \mathcal{D}f$, platí $f(x, y) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.
Píšeme

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = L, \text{ resp. } \lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x, y) = L, \text{ resp. } \lim_{X \to P} f(X) = L. \qquad (2.1)$$

Poznámka 2.4.

1. Jinými slovy můžeme říct definici 2.3 následovně: Funkce $f(x, y)$ má v hromadném bodě $P = [x_0, y_0]$ svého definičního oboru $\mathcal{D}f$ *limitu*

$L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechny body $X = [x, y] \in \mathcal{D}f$, pro jejichž vzdálenost $\rho(P, X)$ platí nerovnost $0 < \rho(P, X) < \delta$, je splněna nerovnost $|f(X) - L| < \varepsilon$.

2. Definice 2.3 je definicí vlastní limity ve vlastním bodě.

3. Bod P je hromadným bodem $\mathcal{D}f$, tedy v libovolném jeho ryzím okolí $\mathcal{P}(P)$ budou obsaženy nějaké body patřící do $\mathcal{D}f$. Kdybychom neuvažovali, že P je hromadným bodem, pak by libovolné dostatečně malé ryzí okolí $\mathcal{P}(P)$ bylo prázdné a definici limity by vyhovovalo libovolné číslo $L \in \mathbb{R}$. Z tohoto důvodu nedefinujeme limitu v izolovaném bodě.

4. Funkci zkoumáme v ryzím okolí bodu, což znamená, že limita nezávisí na funkční hodnotě funkce v tomto bodě, tj. funkční hodnota se může lišit od limity v tomto bodě nebo funkce nemusí být v daném bodě vůbec definována.

5. Obdobně lze zavést nevlastní limitu $L = \pm\infty$ a limity v nevlastních bodech $(\pm\infty, \pm\infty)$, $(\pm\infty, y_0)$, $(x_0, \pm\infty)$.

Pro limity funkcí dvou proměnných platí věty o limitách funkcí podobně jako u funkcí jedné proměnné. I jejich důkazy jsou v principu stejné.

Věta 2.5. *Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ nejvýše jednu limitu.*

Věta 2.6. *Nechť $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x, y) = 0$ a funkce g je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu $[x_0, y_0]$ (tj., existuje konstanta $K \geq 0$ taková, že $|g(x, y)| \leq K$ v tomto ryzím okolí). Pak*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = 0.$$

Věta 2.7. *Nechť existuje ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0]$ takové, že $h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ pro všechna $[x,y] \in \mathcal{P}(x_0, y_0)$. Nechť existují limity $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} h(x,y)$ a $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} g(x,y)$ a platí, že*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} h(x,y) = \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} g(x,y) = L.$$

Potom existuje také limita $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ a platí

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L.$$

Věta 2.8. *Nechť*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L_1, \qquad \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} g(x,y) = L_2$$

a $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, $[x_0, y_0]$ je hromadný bod množiny $\mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g$. Pak pro každé $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} cf(x,y) = cL_1,$$

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} [c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)] = c_1 L_1 + c_2 L_2,$$

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} [f(x,y) g(x,y)] = L_1 L_2.$$

Je-li $L_2 \neq 0$, pak

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Dalším důležitým pojmem je spojitost funkce.

Definice 2.9. Řekneme, že funkce $f(x,y)$ je **spojitá** v bodě $[x_0, y_0]$ svého definičního oboru $\mathcal{D}f$, platí-li $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Poznámka 2.10.

1. Z definice vyplývá, že funkce f je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, který je hro-

madným bodem definičního oboru funkce f, pokud limita L v tomto bodě existuje, funkce f je v tomto bodě definována (existuje $f(x_0, y_0)$) a hodnota limity L je rovna funkční hodnotě $f(x_0, y_0)$.

2. Pokud je funkce definována v izolovaném bodě definičního oboru, nelze spojitost pomocí limity zavést. Domluvíme se proto, že v každém izolovaném bodě definičního oboru budeme považovat funkci za spojitou.

Věta 2.11. *Buďte funkce f, g spojité v bodě $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g$. Pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$. Je-li navíc $g(x_0, y_0) \neq 0$, pak rovněž $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$.*

Než si uvedeme další větu, připomeňme si, jak se skládají funkce jedné proměnné.

Definice 2.12. Mějme funkci $z = f(u)$ definovanou na definičním oboru $\mathcal{D}f$ a funkci $u = g(x)$ definovanou na $\mathcal{D}g$. Pokud pro každé $x \in \mathcal{D}g$ je $g(x) \in \mathcal{D}f$, pak funkci $z = F(x) = f(g(x))$ (můžeme psát i $z = f \circ g$) nazveme **složenou funkcí**.

U funkce dvou proměnných $f(g, h)$ budeme dosazovat za obě proměnné nové funkce $g = g(x, y)$, $h = h(x, y)$ dvou proměnných x a y. Složená funkce pak bude mít tvar $z = F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$.

Věta 2.13. *Uvažujme složenou funkci $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$. Buďte funkce g, h spojité v bodě $[x_0, y_0]$ a nechť $u_0 = g(x_0, y_0)$, $v_0 = h(x_0, y_0)$. Je-li funkce f spojitá v bodě $[u_0, v_0]$, pak je složená funkce F spojitá v bodě $[x_0, y_0]$.*

Příklad 2.14. Určete body, v nichž není funkce $F(x, y) = \frac{3x-4y}{1-x^2-y^2}$ spojitá

Řešení. Funkce $g(x, y) = 3x - 4y$, $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ jsou polynomy dvou proměnných a ty jsou spojité v celé rovině. Funkce $f(g(x, y), h(x, y)) = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ není spojitá v bodech, ve kterých není definována, tj. kde $h(x, y) = 0$. Tedy v bodech, kde je splněna rovnice $x^2 + y^2 = 1$. Body nespojitosti tvoří kružnici se středem v počátku a s poloměrem 1.

Definice 2.15. Řekneme, že funkce f je na množině $M \subset \mathcal{D}f \subset \mathbb{R}^2$ **spojitá**, je-li spojitá v každém bodě množiny M.

Poznámka 2.16. Jak již bylo řečeno v každém izolovaném bodě definičního oboru budeme považovat funkci za spojitou. Je-li množina $M \subset \mathcal{D}f \subset \mathbb{R}^2$ tvořena izolovanými body, pak budeme funkci považovat na množině M za spojitou.

Věta 2.17. (Weierstrassova) *Je-li funkce f spojitá na kompaktní množině $M \subset \mathcal{D}f \subset \mathbb{R}^2$ (tj. uzavřené a ohraničené), potom na množině M nabývá své nejmenší a největší hodnoty, tj. existují body $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in M$ takové, že*

$$f(x_1, y_1) = \max\{f(x, y); [x, y] \in M\} \quad f(x_2, y_2) = \min\{f(x, y); [x, y] \in M\}.$$

Z předchozí věty plyne následující důsledek.

Důsledek 2.18. *Je-li funkce spojitá na kompaktní množině, pak je na této množině omezená.*

Věta 2.19. (Bolzanova) *Nechť je funkce f spojitá na otevřené souvislé množině $M \subset \mathcal{D}f \subset \mathbb{R}^2$. Nechť A a B jsou libovolné prvky z M, pro něž platí $f(A) \neq f(B)$. Potom funkce f nabývá všech hodnot mezi čísly $f(A)$ a $f(B)$, tzn. že ke každému číslu c ležícímu mezi hodnotami $f(A)$ a $f(B)$ existuje bod $C \in M$ tak, že $f(C) = c$.*

Z předchozí věty plyne jednoduché tvrzení.

Důsledek 2.20. *Nechť je funkce f spojitá na otevřené souvislé množině M a nechť existují $A, B \in M$ tak, že $f(A) \cdot f(B) < 0$. Potom existuje bod $C \in M$ tak, že $f(C) = 0$ (tzv. 1. Bolzanova věta).*

Postupná dvojnásobná limita

Od limity ve smyslu definice 2.3, tzv. *dvojné* limity je nutno rozlišovat tzv. postupné dvojnásobné limity.

Definice 2.21. Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce dvou proměnných, $[x_0, y_0]$ bod. Pak limity

$$\lim_{y\to y_0}\big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\big) = L_1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to x_0}\big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\big) = L_2$$

se nazývají **postupné dvojnásobné limity**.

Následující věta popisuje vztah postupných dvojnásobných limit k limitě dvojné.

Věta 2.22. *Existují-li všechny tři limity L, L_1, L_2, pak jsou si nutně rovny.*

Důsledek 2.23. *Nechť existují L_1, L_2 a $L_1 \neq L_2$. Pak limita L neexistuje.*

Poznámka 2.24.

1. Nechť existují limity L_1, L_2 a $L_1 = L_2$. Pak limita L dané funkce v daném bodě $[x_0, y_0]$ nemusí existovat.

2. Nechť existuje limita L dané funkce v bodě $[x_0, y_0]$. Pak nemusí existovat limity L_1 a L_2.

2.2 Řešené příklady

Rozdíl mezi limitou funkce jedné proměnné a limitou funkcí více proměnných spočívá v "dimenzi" okolí bodu, ve kterém limitu počítáme. U funkce jedné proměnné se při limitním přechodu $x \to x_0$ bod x blíží k bodu x_0 vždy jen po ose x, tj. ze dvou stran, zprava resp. zleva. Počítáme tak limitu funkce zprava resp. zleva. To znamená, že funkce má v bodě x_0 limitu, jestliže tyto jednostranné limity existují a jsou si rovny. U funkce dvou a více proměnných je možností přibližování se bodu nekonečně mnoho. Můžeme se k danému bodu blížit po přímkách, parabolách či obecných množinách. Nezáleží na způsobu přibližování se danému bodu, tedy na cestě, po které se k danému bodu blížíme, ale pro existenci limity musí být dosažené hodnoty limity stejné. Pokud dostaneme různé hodnoty limity pro různé cesty, pak limita v daném bodě neexistuje.

Poznámka 2.25. Počítání limit funkcí dvou proměnných je mnohdy složitější než v případě funkcí jedné proměnné. Při počítání limit funkcí jedné proměnné bylo možno u tzv. neurčitých výrazů použít l'Hospitalova pravidlo, ke kterému však není k dispozici žádná analogie pro funkce n proměnných, kde $n \geq 2$. Uveďme nyní několik možností, jak při vyšetřování dvojných limit postupovat.

1. Přímým dosazením, pokud počítáme limitu v bodě spojitosti. Hodnota limity je pak rovna funkční hodnotě v bodě spojitosti. Abychom tedy mohli souřadnice bodu, ve kterém limitu funkce vyšetřujeme, dosadit, potřebujeme vědět, zda je zkoumaná funkce v daném bodě spojitá. Již jste se v předchozím ročníku seznámili s elementárními funkcemi jedné proměnné (polynomy, goniometrické funkce, logaritmické a exponenciální funcke, mocninné funkce a také funkce, které z nich vzniknou po konečném počtu aritmetických operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání), které jsou ve všech bodech svého definičního oboru spojité. Elementární funkce dvou proměnných vytvořené z elementárních funkcí jedné proměnné, jejichž proměnné jsou označeny různými písmeny, jsou spojité na svých definičních oborech. Například uveďme $f(x,y) = \mathrm{e}^{1+x/y}$, $f(x,y) = 7x^2 + xy^3 + y$, $f(x,y) = \ln(\sin x^4) + \sqrt{y}$.

2. Pokud není možné přímé dosazení, snažíme se vhodnými úpravami funkci vyjádřit v jiném tvaru.

3. Metoda substituce. Využijeme větu o limitě složené funkce (za použití substituci $t = g(x,y)$ převedeme funkci dvou proměnných na funkci jedné proměnné) a znalosti základních limit.

   Věta 2.26. (Limita složené funkce) *Buď $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ a $A, L \in \mathbb{R}$. Nechť f a g splňují*

   $$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} g(x,y) = A, \quad \lim_{t\to A} f(t) = L$$

   a existuje ryzí okolí $\mathcal{P}([x_0, y_0])$ bodu $[x_0, y_0]$ takové, že $g(x,y) \neq A$ pro každé $[x,y] \in \mathcal{P}([x_0, y_0])$ nebo je funkce f spojitá v A. Potom $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(g(x,y)) = L$.

4. Metoda polárních souřadnic. Provedeme transformaci funkce $f(x,y)$ do polárních souřadnic pomocí rovnic tvaru

   $$x = x_0 + r\cos\varphi, \qquad y = y_0 + r\sin\varphi.$$

Dosadíme transformační vztahy a dostáváme limitu

$$L^* = \lim_{r \to 0^+} f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi).$$

Závisí-li hodnota limity L^* na úhlu φ, znamená to, že závisí na cestě, po které se blížíme k danému bodu, a proto limita L neexistuje. Nezávisí-li na φ, nelze o existenci limity nic soudit.
Lze dokázat, že platí: Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ limitu rovnu číslu L^*, jestliže existuje nezáporná funkce $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ splňující $\lim\limits_{r \to 0^+} g(r) = 0$ taková, že

$$|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L^*| \leq g(r)$$

pro každé $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ a $r > 0$ dostatečně malá.
Dostaneme-li po transformaci $f(x, y) = g(r)h(\varphi)$, kde $\lim\limits_{r \to 0^+} g(r) = 0$ a $h(\varphi)$ je ohraničená na $\langle 0, 2\pi)$, pak $\lim\limits_{[x,y] \to [x_0, y_0]} f(x, y) = 0$.

5. Metoda svazku přímek. K bodu $[x_0, y_0]$, ve kterém zkoumáme limitu funkce $f(x, y)$, se můžeme přibližovat po přímkách o rovnicích $y = k(x - x_0) + y_0$ pro různé směrnice k. Místo limity L budeme zkoumat limitu L^{**}, kde

$$L^{**} = \lim_{x \to x_0} f(x, k(x - x_0) + y_0).$$

Pokud závisí hodnota limity L^{**} na směrnici k, pak limita L neexistuje. Nezávisí-li na k, nelze o existenci limity L nic soudit.

6. Metoda svazku parabol. K bodu $[x_0, y_0]$, ve kterém zkoumáme limitu, se můžeme přibližovat po parabolách o rovnicích $y = k(x - x_0)^2 + y_0$ pro konstanty $k \neq 0$. Místo limity L budeme vyšetřovat limitu L^{***}, kde

$$L^{***} = \lim_{x \to x_0} f(x, k(x - x_0)^2 + y_0).$$

Pokud závisí hodnota limity L^{***} na konstantě k, pak limita L neexistuje. Nezávisí-li na k, nelze o existenci limity L nic soudit.

Příklad 2.27. Vypočtěte limitu funkce $f(x, y) = \frac{x+y^2+4}{x^2+y+2}$ v bodě $[-1, 1]$.

Řešení. Zadaná funkce f je v bodě $[-1, 1]$ spojitá, proto můžeme tento bod přímo dosadit. Hodnota limity je rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Platí tedy

$$\lim_{[x,y] \to [-1,1]} \frac{x + y^2 + 4}{x^2 + y + 2} = \frac{-1 + 1^2 + 4}{(-1)^2 + 1 + 2} = \frac{4}{4} = 1.$$

Příklad 2.28. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^3+1}{y(x+1)}$ v bodě $[-1,4]$.

Řešení. Po dosazení bodu $[-1,4]$ získáme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, proto se snažíme příslušný výraz vhodně upravit.

$$\lim_{[x,y]\to[-1,4]} \frac{x^3+1}{y(x+1)} = \lim_{[x,y]\to[-1,4]} \frac{(x^2-x+1)(x+1)}{y(x+1)} =$$
$$= \lim_{[x,y]\to[-1,4]} \frac{(x^2-x+1)}{y} = \frac{(-1)^2-(-1)+1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ze zadané funkce f definičním oborem $\mathcal{D}f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \neq 0, x \neq 1\}$ jsme úpravami získali funkci $F = \frac{(x^2-x+1)}{y}$ s $\mathcal{D}F = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$. V důsledku spojitosti funkce F v bodě $[-1,4]$, jsme v posledním kroku výpočtu limity mohli tento bod přímo dosadit.

Příklad 2.29. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}$ v bodě $[0,0]$.

Řešení. Po dosazení bodu $[0,0]$ do zadané funkce f získáme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$. Rozšíříme funkci výrazem $3+\sqrt{xy+9}$, upravíme a pak limitu spočteme.

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3-\sqrt{xy+9}}{xy} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3-\sqrt{xy+9}}{xy} \cdot \frac{3+\sqrt{xy+9}}{3+\sqrt{xy+9}}$$
$$= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{-xy}{xy(3+\sqrt{xy+9})} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{-1}{3+\sqrt{xy+9}} = -\frac{1}{6}.$$

Nezapomeňme, že úpravami zadaného výrazu se také měnil definiční obor.

Příklad 2.30. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = xy^2 \cos\frac{1}{xy^2}$ v bodě $[0,0]$.

Řešení. Aplikujeme větu 2.6. Jelikož $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} xy^2 = 0$ a $|\cos\frac{1}{xy^2}| \leq 1$ v celé rovině $\mathbb{R}^2$ mimo osy x, y je $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} xy^2 \cos\frac{1}{xy^2} = 0$.

Příklad 2.31. Vypočtěte limitu funkce $F(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$ v bodě $[1,-1]$.

Řešení. Příklad budeme řešit pomocí věty 2.26. Bod $[x_0,y_0] = [1,-1]$ a $f(g(x,y)) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$. Položíme $t = g(x,y) = x+y$. Pak funkce $f(t) = \frac{\sin t}{t}$. Protože $\lim\limits_{[x,y]\to[1,-1]} (x+y) = 0$, je $A = 0$. Z $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ plyne, že $L = 1$. Jelikož funkce f není v bodě $A = 0$ spojitá (limita existuje, ale funkce v tomto bodě není definována), zbývá ověřit, zda existuje ryzí okolí $\mathcal{P}[1,-1]$ bodu $[1,-1]$ takové, že $x+y \neq 0$ pro každý bod $[x,y] \in \mathcal{P}[1,-1]$. Takové okolí $\mathcal{P}[1,-1]$

existuje a tedy $\lim\limits_{[x,y]\to[1,-1]} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1$.

Příklad 2.32. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x-2y}{3x+y}$ v bodě $[0,0]$.

Řešení. K vyšetření limity použijeme metodu postupných limit. Platí

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-2y}{3x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-2y}{y} = \lim_{y\to 0}(-2) = -2.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-2y}{3x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Obě postupné limity L_1, L_2 existují, ale jsou různé. Z důsledku 2.23 plyne, že daná limita neexistuje.

Příklad 2.33. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$ v bodě $[0,0]$.

Řešení. K vyšetření limity nejdříve použijeme metodu postupných limit. Platí

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0.$$

Obě limity L_1, L_2 existují a jsou rovny nule. O existenci limity nelze na základě tohoto výsledku nic soudit. Použijeme metodu svazku přímek.

$$L^{**} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx(x+kx)}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^3(1+k)}{x^2(1+k^2)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{kx(1+k)}{1+k^2} = 0.$$

Limita L^{**} nezávisí na k, nelze tedy o existenci limity nic usoudit. Nyní použijeme metodu svazku parabol.

$$L^{***} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}}\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx^2(x+kx^2)}{x^2+(kx^2)^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{kx^4(1+kx)}{x^2(1+k^2x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2(1+kx)}{1+k^2x^2} = 0.$$

Limita L^{***} nezávisí na k, o existenci limity nelze na tomto základě nic usoudit. Použijeme metodu transformace do polárních souřadnic. Platí

$$L^* = \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+}\frac{r\cos\varphi r\sin\varphi(r\cos\varphi+r\sin\varphi)}{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}$$
$$= \lim_{r\to 0^+}\frac{r^3\cos\varphi\sin\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r\cos\varphi\sin\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi) = 0.$$

Funkce $h(\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi)$ je ohraničená, jelikož funkce $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ jsou ohraničené, pak také jejich součet a součin je ohraničený, tj. $|\cos\varphi \sin\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi)| \leq 1$. Protože funkce $h(\varphi)$ je ohraničená a limita funkce $g(r) = r$ pro $r \to 0^+$ je 0, zadaná limita L existuje a je rovna 0.

Příklad 2.34. Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro} \quad [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0, 0]$.

Řešení. Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0, 0]$, musela by mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Při vyšetřování limity metodou postupných limit, metodou svazku přímek, metodou svazku parabol i metodou transformace do polárních souřadnic dostáváme výsledek nula. O existenci limity nelze na tomto základě nic soudit. Ale pro zjištění spojitosti funkce můžeme použít některou z výše uvedených vět. Použijeme větu 2.6. Zřejmě platí

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} x \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Přitom $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} x = 0$. Ukažme nyní, že funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ je ohraničená. Platí

$$(|x| - |y|)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2|xy| + y^2 \geq 0 \Rightarrow 2|xy| \leq x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Tedy funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ je pro $[x, y] \neq [0, 0]$ ohraničená a funkce f je v bodě $[0, 0]$ spojitá.

Příklad 2.35. Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^5+y^3} & \text{pro} \quad [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro} \quad [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0, 0]$.

Řešení. Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0, 0]$, musela by mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Při vyšetřování limity metoda postupných limit, metoda svazku přímek i metoda transformace do polárních souřadnic selhává.

Dostáváme výsledek nula, z čehož nemůžeme o existenci limity či spojitosti nic usuzovat. Zvolíme tedy jinou metodu pro vyšetření limity. Metodou svazku parabol ukážeme, že limita rovna nule není, a tedy zkoumaná funkce v daném bodě není spojitá.

$$L^{**} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}} \frac{x^3y}{x^5+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3kx^2}{x^5+(kx^2)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5k}{x^5(1+k^3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^3x} = k.$$

Protože limita L^{**} závisí na parametru k, zadaná limita neexistuje a funkce f je v bodě $[0,0]$ nespojitá.

Příklad 2.36. Rozhodněte, zda funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x=0 \text{ nebo } y=0, \\ 0 & \text{pro} \quad \text{jinak} \end{cases}$$

je v bodě $[0,0]$ spojitá.

Řešení. Spočteme si limitu například po bodech $[0,y]$, tj. $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 1$, a bodech $[x,x]$, tj. $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 0$. Funkce f není spojitá, neboť v bodě $[0,0]$ neexistuje limita. Grafem funkce f je podstavná rovina, z níž je "vyzdvižen" osový kříž o jedničku.

2.3 Krokovaný příklad

Příklad. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^6+y^3}$ v bodě $[0,0]$.
Řešení.
Postupně budeme aplikovat různé metody výpočtu limity funkce dvou proměnných, dokud jedna z nich nepovede k výsledku.

Postupná limita

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to \boxed{0}\,\boxed{?}} \frac{x^2y^2}{x^6+y^3}\right) = \boxed{0 \qquad\qquad}\boxed{?}.$$

$$L_2 = \lim_{x\to \boxed{0}\,\boxed{?}}\left(\lim_{y\to \boxed{0}\,\boxed{?}} \frac{x^2y^2}{x^6+y^3}\right) = \boxed{0 \qquad\qquad}\boxed{?}.$$

Obě limity L_1, L_2 existují a jsou rovny nule. O existenci limity nelze na tomto základě nic soudit. Následuje metoda svazku přímek.

Metoda svazku přímek

$$L^{**} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2y^2}{x^6+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\boxed{\qquad\qquad}\boxed{?}}{\boxed{\qquad\qquad}\boxed{?}} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x}{\boxed{\qquad\qquad}\boxed{?}} = \boxed{\qquad}\boxed{?}.$$

Limita L^{**} nezávisí na k, nelze tedy o existenci limity nic usoudit. Následuje metoda transformace do polárních souřadnic.

Metoda transformace do polárních souřadnic

$$L^{*} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y^2}{x^6+y^3} = \lim_{r\to 0+} \frac{\boxed{\qquad\qquad}\boxed{?}}{(r\cos t)^6+(r\sin t)^3}$$

$$= \lim_{r\to 0+} \frac{r\cos^2 t\sin^2 t}{\boxed{\qquad\qquad}\boxed{?}} = \boxed{\qquad\qquad}\boxed{?}.$$

Limita L^{*} nezávisí na t, nelze tedy o existenci limity nic usoudit. Následuje metoda svazku parabol.

Metoda svazku parabol

$$L^{***} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}} \frac{x^2y^2}{x^6+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\boxed{\qquad\qquad}\boxed{?}}{\boxed{\qquad\qquad}\boxed{?}} = \lim_{x\to 0} \frac{\boxed{\quad}\boxed{?}}{1+k^3} = \boxed{\qquad\qquad}\boxed{?}.$$

Protože limita L^{***} závisí na k, zadaná limita L $\boxed{\qquad\qquad}\boxed{?}$.

2.4 Úlohy k samostatnému řešení a kontrolní otázky

Cvičení 2.1. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{6x-3y-5}{x^3-y^2}$ v bodě $[-1,5]$.

Cvičení 2.2. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2-1}{y+4}$ v bodě $[1,-4]$.

Cvičení 2.3. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ v bodě $[2,2]$.

Cvičení 2.4. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{y^3-x^3-7}{x+y-3}$ v bodě $[1,2]$.

Cvičení 2.5. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}$ v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.6. Určete body nespojitosti funkce $f(x,y) = \frac{5x-4}{\sqrt{x^2-y+5}}$.

Cvičení 2.7. Určete body nespojitosti funkce $f(x,y) = 3x\cos(x^2+y^2-4)$.

Cvičení 2.8. Určete body nespojitosti funkce $f(x,y) = \frac{y-2x^2}{\ln\sqrt{\mathrm{e}^{xy}}}$.

Cvičení 2.9. Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro} \quad [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.10. Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro} \quad [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0,0]$.

Otázka 2.1. Co je to hromadný bod množiny?

Otázka 2.2. Proč hledáme limity v hromadných bodech?

Otázka 2.3. Co je to vlastní limita ve vlastním bodě?

Otázka 2.4. Co je to izolovaný bod množiny?

Otázka 2.5. Jakými způsoby můžeme vyšetřovat limitu funkce dvou proměnných? A v čem se to liší od vyšetřování limity funkce jedné proměnné?

Otázka 2.6. Existuje analogie l'Hospitalovo pravidlo pro funkce dvou a více proměnných?

Otázka 2.7. Kdy je funkce dvou proměnných spojitá?

Otázka 2.8. Co jsou to body nespojistosti funkce a jak se určují?

Otázka 2.9. Jaký je vztah mezi limitou funkce a spojitostí funkce?

Otázka 2.10. Mějme funkci, která v daném bodě nemá limitu. Může být v tomto bodě spojitá?

2.5 Výsledky úloh k samostatnému řešení

Cvičení 2.1. 1

Cvičení 2.2. neexistuje

Cvičení 2.3. $\frac{3}{8}$

Cvičení 2.4. neexistuje

Cvičení 2.5. $\frac{1}{4}$

Cvičení 2.6. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2 + 5\}$

Cvičení 2.7. spojitá v každém bodě $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

Cvičení 2.8. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x = 0, y = 0\}$

Cvičení 2.9. spojitá

Cvičení 2.10. nespojitá

2.6 Kontrolní test

Start testu **Limita a spojitost funkce**

Pokud v následujících příkladech máte vepsat hodnotu limity, která neexistuje, vepište do odpovídajícího pole pro odpověď znak -.

1. Rozhodněte, zda existuje limita $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) = \frac{-2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}$.

(a) (a) ano (b) ne

(b) Hodnota limity je:

2. Nechť je dána limita $\lim\limits_{[x,y]\to[2,0]} f(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{x}$.

(a) Rozhodněte, zda limita existuje.

(a) ano (b) ne

(b) Hodnota limity je:

3. Rozhodněte, zda limita funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $[0,0]$

- ☐ neexistuje
- ☐ existuje a je nevlastní
- ☐ existuje a je vlastní, tj.

4. Rozhodněte, zda limita funkce $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ v bodě $[0,0]$

- ☐ neexistuje
- ☐ existuje a je nevlastní
- ☐ existuje a je vlastní, tj.

5. Je dána funkce $f(x,y) = \frac{3y}{x^3+y}$.

(a) Limita $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) =$

(b) Funkce f je spojitá v $\mathbb{R}^2$ pro

- ☐ $y \le x^3$
- ☐ $y > -x^3$
- ☐ $y \ne -x^3$
- ☐ pro všechny body $\mathbb{R}^2$

6. Je dána funkce $f(x,y) = \frac{\ln x}{y}$.

(a) Limita $\lim\limits_{[x,y]\to[e^2,1]} f(x,y) =$

(b) Funkce f je spojitá v $\mathbb{R}^2$ pro

- ☐ $y \ne 0 \wedge x \ne 0$
- ☐ $y \le 0 \wedge x \ge 0$
- ☐ $y \ge 0 \wedge x < 0$
- ☐ $y \ne 0 \wedge x > 0$

7. Rozhodněte, zda je limita $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{e^{-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$

(a) ☐ vlastní ☐ nevlastní ☐ neexistuje

(b) Hodnoty limity je

☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ jiná, tj. ☐

8. Rozhodněte, zda je limita $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

(a) ☐ vlastní ☐ nevlastní ☐ neexistuje

(b) Hodnoty limity je

☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ jiná, tj. ☐

9. Rozhodněte o spojitosti složené funkce $f \circ g$, přičemž $f(t) = t^2 + 2$, $g(x, y) = 2x - 4y$. Složená funkce

☐ je spojitá v $\mathbb{R}^2$ ☐ není spojitá v $\mathbb{R}^2$

10. Složená funkce $f \circ g$, kde funkce $f(t) = e^t$, $g(x, y) = \frac{x}{y} - 1$ je spojitá na:

☐ $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \neq y\}$ ☐ $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x}{y} > 1\}$

☐ $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$ ☐ $\mathbb{R}^2$

Konec testu Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek: ☐

Procento úspěšnosti: ☐

Zobrazení správného výsledku: ☐

3 Parciální derivace

Klíčová slova. Parciální derivace, řád parciální derivace, Schwarzova věta.

3.1 Pojem a základní vlastnosti parciálních derivací

Dříve než zavedeme pojem parciální derivace pro funkce více proměnných, připomeňme, že „obyčejná“ derivace funkce jedné proměnné v bodě x_0 je definována jako limita tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Čtenář si patrně vzpomene, že derivaci funkce v daném bodě lze z geometrického hlediska interpretovat jako směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Analogickou úlohou k sestrojení tečny ke grafu funkce jedné proměnné je v případě funkce dvou proměnných sestrojení tečné roviny ke grafu funkce. Abychom mohli nalézt rovnici tečné roviny v daném bodě, stačí z nekonečně mnoha přímek, které leží v této rovině a procházejí bodem dotyku, zvolit dvě libovolné různé a získat o nich údaje potřebné k jejich sestrojení. V této souvislosti vyvstává otázka, jak volbu těchto dvou přímek provést. Jedná se vlastně o to, po které přímce ležící v rovině xy a procházející bodem $[x_0, y_0]$ se budeme k tomuto bodu přibližovat. Nápovědu, která nám umožní tyto přímky vhodně zvolit, získáme, když si připomeneme situaci při výpočtu limity, kdy jsme ze všech možných „způsobů“ přechodu k bodu $[x_0, y_0]$ volili nejprve možnost blížit se k němu po rovnoběžkách s osami x a y. Dostáváme se tak k následující definici.

Definice 3.1. Nechť je funkce $f(x, y)$ definovaná v bodě $[x_0, y_0]$, který je vnitřním bodem množiny $\mathcal{D}f$. Jestliže existuje limita tvaru

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

nazýváme ji **parciální derivací** funkce $f(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji

$$f_x(x_0, y_0), \qquad \text{popř.} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Analogicky pak limitu tvaru

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

nazýváme parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji

$$f_y(x_0, y_0), \qquad \text{popř.} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Poznámka 3.2. V definici předpokládáme, že bod $[x_0, y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru funkce f. Pak je totiž zaručeno, že body tvaru $[x_0 + h, y_0]$, kde h je dostatečně malé, leží v $\mathcal{D}f$. Stačilo ovšem požadovat, aby funkce f byla definovaná na nějaké množině, v níž leží body tvaru $[x_0 + h, y_0]$ pro malá h.

Z definice je názorně vidět, že přechod k bodu $[x_0, y_0]$ po rovnoběžkách s jednotlivými osami znamená, že jedna z proměnných je konstantní. Povšimněte si, že pokud bychom vynechali symbol y_0 z definice parciální derivace podle proměnné x, obdržíme limitu, jejíž tvar odpovídá obyčejné derivaci funkce jedné proměnné. V důsledku toho můžeme při výpočtu parciální derivace podle x považovat proměnnou y za konstantu. Obdobně při výpočtu parciální derivace podle y předpokládáme, že y je jediná proměnná ve funkčním vzahu, a s proměnnou x počítáme jako s konstantou.

Příklad 3.3. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + y$.

Řešení. Při výpočtu parciální derivace funkce f podle x považujeme proměnnou y za konstantu. Pak derivujeme podle obvyklých pravidel a dostáváme

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2y^2, \qquad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Jestliže nyní naopak považujeme za konstantu proměnnou x, obdržíme výsledek

$$f_y(x, y) = 4xy + 1, \qquad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Příklad 3.4. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = x\mathrm{e}^{xy}$.

Řešení. Jestliže nejprve považujeme proměnnou y za konstantu, pak podle pravidla o derivování součinu máme

$$f_x(x, y) = \mathrm{e}^{xy} + yx\mathrm{e}^{xy} = \mathrm{e}^{xy}(1 + xy), \qquad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

V případě, že považujeme za konstantu proměnnou x, dostáváme podle pravidla o derivování exponenciální funkce

$$f_y(x, y) = x^2 e^{xy}, \qquad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Zobecníme-li úvahy, které jsme prováděli při zavedení pojmu parciální derivace funkce dvou proměnných, na případ funkce n proměnných, zjistíme, že lze postupovat zcela analogicky. Všechny proměnné kromě té, podle které budeme derivovat, považujeme za konstanty. V následující definici je pro ilustraci vymezen pojem parciální derivace funkce n proměnných podle první proměnné, přičemž v případě ostatních proměnných by definice byla obdobná.

Definice 3.5. Nechť je funkce $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ definovaná v bodě $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$, který je vnitřním bodem množiny $\mathcal{D}f$. Jestliže existuje limita tvaru

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^* + h, x_2^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{h},$$

nazýváme ji **parciální derivací** funkce $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ podle proměnné x_1 v bodě $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ a značíme ji

$$f_{x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \qquad \text{popř.} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*).$$

Protože parciální derivace funkce n proměnných se počítá jako obyčejná derivace pomocné funkce jedné proměnné, můžeme formulovat následující tvrzení, které je zobecněním vztahů platných pro počítání s obyčejnými derivacemi funkcí jedné proměnné. Jedná se o čtenáři dobře známá pravidla pro derivaci násobku funkce konstantou, dále pak pravidla pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí. Důkaz této věty je pouhou analogií důkazu obdobného tvrzení týkajícího se pravidel pro derivování funkcí jedné proměnné. Rovněž použití těchto pravidel považujeme za zcela intuitivní pro čtenáře obeznámeného s pojmem derivace. Některá z pravidel byla využita už v předcházejících příkladech a předpokládáme, že to čtenáři nečinilo vážnější potíže.

Věta 3.6. *Nechť mají funkce $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ a $g(x_1, x_2, \dots x_n)$ parciální derivace v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ podle proměnné x_i, $i = 1 \le i \le n$. Pak mají v tomto bodě parciální derivace také funkce $c \cdot f$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ a f/g, přičemž platí:*

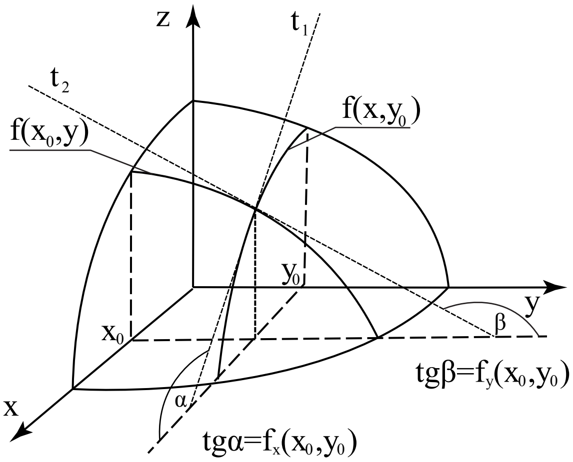
1. $(c \cdot f)_{x_i}(x^*) = c \cdot f_{x_i}(x^*)$,
2. $(f + g)_{x_i}(x^*) = f_{x_i}(x^*) + g_{x_i}(x^*)$,
3. $(f - g)_{x_i}(x^*) = f_{x_i}(x^*) - g_{x_i}(x^*)$,
4. $(f \cdot g)_{x_i}(x^*) = f_{x_i}(x^*) \cdot g(x^*) + f(x^*) \cdot g_{x_i}(x^*)$,
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)_{x_i}(x^*) = \dfrac{f_{x_i}(x^*) \cdot g(x^*) + f(x^*) \cdot g_{x_i}(x^*)}{g^2(x^*)}, \quad g(x^*) \neq 0.$

3.2 Geometrický význam parciálních derivací funkce $f(x, y)$

Nechť je dána funkce $f(x, y)$ a bod $[x_0, y_0]$. Už jsme zmínili, že při výpočtu parciálních derivací považujeme vždy jednu z proměnných za konstantní. Jestliže proměnnou y zafixujeme na hodnotě y_0 a budeme měnit pouze hodnoty proměnné x, pracujeme vlastně s funkcí jedné proměnné, jejíž graf leží v rovině $y = y_0$. Můžeme tedy v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ sestrojit tečnu t_1 ke grafu funkce $f(x, y)$, resp. funkce $\phi(x) = f(x, y_0)$ ležící v rovině $y = y_0$. Tato tečna bude rovnoběžná s rovinou xz a její směrnice je právě parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle proměné x. Analogicky, jestliže zafixujeme proměnnou x na hodnotě x_0 a budeme měnit pouze hodnoty proměnné y, pracujeme rovněž s funkcí jedné proměnné, jejíž graf leží v rovině $x = x_0$. Opět můžeme v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ sestrojit tečnu t_2 ke grafu funkce $f(x, y)$, resp. funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ ležící v rovině $x = x_0$. Tato tečna bude rovnoběžná s rovinou yz a její směrnice je právě parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle proměnné y. Označíme-li úhel, který svírá tečna t_1 ke grafu funkce $\phi(x) = f(x, y_0)$ s kladnou částí osy x jako α a úhel, který svírá tečna t_2 ke grafu funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ s kladnou částí osy y jako β, můžeme psát

$$\operatorname{tg} \alpha = f_x(x_0, y_0), \qquad \text{popř.} \qquad \operatorname{tg} \beta = f_y(x_0, y_0).$$

Situaci názorně ilustruje obrázek 12.



Obrázek 12: Parciální derivace jako směrnice tečen t_1 a t_2

3.3 Parciální derivace vyšších řádů

Nejdříve bychom chtěli připomenout, že parciální derivace funkce v daném bodě je definovaná jako limita jistého tvaru. Protože limita funkce je (pokud existuje) dána jednoznačně, vyplývá odtud, že libovolná funkce může mít v libovolném bodě nejvýše jednu parciální derivaci podle každé z proměnných. Předpokládejme, že $A \subset \mathcal{D}f$ je množina všech bodů, v nichž existuje parciální derivace funkce $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ podle proměnné x_i. Pak můžeme na množině A definovat funkci, která každému bodu $[x_1, x_2, \dots x_n] \in A$ přiřadí hodnotu $f_{x_i}(x_1, x_2, \dots x_n)$. Vidíme tedy, že parciální derivace funkce jsou opět funkcemi, které můžeme dále derivovat podle jednotlivých proměnných. Dostáváme se tak k následující definici.

Definice 3.7. Nechť $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ je funkce n proměnných. Má-li funkce $f_{x_i}(x_1, x_2, \dots x_n)$ v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ parciální derivaci podle proměnné x_j, nazýváme ji **parciální derivací druhého řádu** funkce $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ v bodě x^* podle proměnných x_i a x_j a značíme ji

$$f_{x_i x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \qquad \text{popř.} \qquad \frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*).$$

V případě funkce $f(x,y)$ dvou proměnných dostáváme tedy celkem čtyři parciální derivace druhého řádu $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ a $f_{yy}(x,y)$. Zcela obdobným způsobem je možné definovat parciální derivaci řádu k funkce $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ opětovným derivováním parciálních derivací řádu $k-1$ podle proměnných $x_1,x_2,\dots x_n$. Pro zápis parciální derivace funkce f řádu k, kde postupně derivujeme j_1-krát podle proměnné x_{i_1}, j_2-krát podle proměnné x_{i_2} atd. až j_r-krát podle proměnné x_{i_r}, používáme symbol

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{j_1}\partial x_{i_2}^{j_2}\cdots\partial x_{i_r}^{j_r}}.$$

Předpokládáme při tom, že $k=j_1+j_2+\cdots+j_r$ a $i_1,i_2,\dots i_r\in\{1,\dots,n\}$.

Příklad 3.8. Vypočtěte parciální derivace druhého řádu funkce

$$f(x,y)=x^3+2xy^2+y.$$

Řešení. V příkladu 3.3 jsme vypočetli

$$f_x(x,y)=3x^2+2y^2,\qquad f_y(x,y)=4xy+1.$$

Obdržené funkce budeme nyní dále derivovat podle proměnných x a y. Dostáváme tedy

$$f_{xx}(x,y)=6x,\qquad f_{xy}(x,y)=4y,\qquad f_{yy}(x,y)=4x,\qquad f_{yx}(x,y)=4y.$$

Příklad 3.9. Vypočtěte parciální derivace druhého řádu funkce

$$f(x,y,z)=3x^2y+\mathrm{e}^{x^2z}-3\sin^2 z.$$

Řešení. Nejdříve vypočteme parciální derivace prvního řádu. Dostáváme

$$f_x=6xy+2xz\mathrm{e}^{x^2z},\qquad f_y=3x^2,\qquad f_z=x^2\mathrm{e}^{x^2z}-6\sin z\cos z.$$

Výsledkem našich výpočtů jsou funkce, které nyní budeme derivovat opět podle proměnných x, y a z. Pro funkci f_x obdržíme

$$f_{xx}(x,y)=6y+2z\mathrm{e}^{x^2z}+4x^2z^2\mathrm{e}^{x^2z},\quad f_{xy}=6x,\quad f_{xz}=2x\mathrm{e}^{x^2z}+2x^3z\mathrm{e}^{x^2z}.$$

Pro zbývající dvě fukce vypadají výsledky takto

$$f_{yx}(x,y) = 6x, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{yz} = 0,$$
$$f_{zx} = 2x\mathrm{e}^{x^2z} + 2x^3z\mathrm{e}^{x^2z}, \quad f_{zy} = 0, \quad f_{zz} = x^4\mathrm{e}^{x^2z} - 6\cos 2z.$$

Povšimneme-li si blíže výsledku v předcházejícím příkladu, zjistíme, že jsme obdrželi následující rovnosti: $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$ a $f_{yz} = f_{zy}$. Nabízí se tedy otázka, jestli se jedná o pouhou shodu okolností nebo o vztahy, které za určitých podmínek platí obecně. Odpověď na tuto otázku dává následující věta.

Věta 3.10. *(Schwarzova) Jestliže jsou smíšené parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y)$ spojité v bodě $[x^*,y^*]$, pak platí*

$$f_{xy}(x^*,y^*) = f_{yx}(x^*,y^*).$$

Důkaz. Uvažujme rozdíl

$$[f(x+h_1,y+h_2) - f(x+h_1,y)] - [f(x,y+h_2) - f(x,y)], \tag{3.1}$$

kde $h_1 > 0, h_2 > 0$ (pro ostatní možnosti by důkaz probíhal zcela analogicky) jsou přírůstky argumentů x, y. Jestliže považujeme veličiny y a h_2 za konstanty, můžeme uvažovaný rozdíl vyjádřit pomocí funkce jedné proměnné. Jestliže položíme $\phi(x) = f(x,y+h_2) - f(x,y)$, dostaneme

$$\phi(x+h_1) = f(x+h_1,y+h_2) - f(x+h_1,y).$$

Vztah (3.1) můžeme nyní psát ve tvaru

$$\phi(x+h_1) - \phi(x).$$

Použijeme-li nyní Lagrangeovu větu o střední hodnotě, dostáváme pro nějaké $c \in (x, x+h_1)$ rovnost

$$\phi(x+h_1) - \phi(x) = h_1\phi'(c) = h_1[f_x(c,y+h_2) - f_x(c,y)].$$

Na rozdíl $[f_x(c,y+h_2) - f_x(c,y)]$ můžeme opět aplikovat větu o střední hodnotě, neboť c je konstanta a dochází zde ke změně pouze ve druhé proměnné. Obdržíme tedy

$$h_1[f_x(c,y+h_2) - f_x(c,y)] = h_1h_2f_{xy}(c,d)$$

pro nějaké $d \in (y, y+h_2)$. Jestliže nyní uvažujeme limitní přechod pro $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$, což neznamená nic jiného než že bod $[c, d]$ se blíží k bodu $[x, y]$, dospíváme k následujícímu závěru

$$\lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{[f(x+h_1, y+h_2) - f(x+h_1, y)] - [f(x, y+h_2) - f(x, y)]}{h_1 h_2} =$$

$$= \lim_{[c,d]\to[x,y]} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(x, y).$$

Při výpočtu poslední limity jsme využili skutečnosti, že smíšené parciální derivace druhého řádu jsou spojitými funkcemi. Z technického hlediska jsme nyní dospěli do poloviny důkazu. Ve druhé části důkazu lze postupovat zcela analogicky s tím, že ve výrazu (3.1) považujeme za konstanty veličiny x a h_1. Vztah (3.1) můžeme nyní vyjádřit jako rozdíl $\psi(y + h_2) - \psi(y)$, kde $\psi(y) = f(x + h_1, y) - f(x, y)$. Poté lze opět dvakrát aplikovat větu o střední hodnotě. Održíme tedy

$$\psi(y + h_2) - \psi(y) = h_2\psi'(d') = h_2[f_y(x + h_1, d') - f_y(x, d')] = h_2 h_1 f_{yx}(c', d'),$$

kde $c' \in (x, x + h_1)$ a $d' \in (y, y + h_2)$. Závěrečný krok pak spočívá v tom, že po výpočtu limity tvaru

$$\lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{[f(x+h_1, y+h_2) - f(x+h_1, y)] - [f(x, y+h_2) - f(x, y)]}{h_1 h_2} =$$

$$= \lim_{[c',d']\to[x,y]} f_{yx}(c', d') = f_{yx}(x, y),$$

je už rovnost

$$f_{xy}(x^*, y^*) = f_{yx}(x^*, y^*)$$

zřejmá. $\diamond$

Už jsme se zmínili o tom, že parciální derivace vyšších řádů, obecně řádu k lze získat opětovným derivováním parciálních derivací řádu $k-1$. V souvislosti se Schwarzovou větou se nyní nabízí otázka, zda je možné zformulovat obdobné tvrzení i pro parciální derivace řádu k. Zamyslíme-li se nyní jen nad ideou důkazu Schwarzovy věty, pak dospějeme k závěru, že důkaz je založen na skutečnosti, že byla dvakrát po sobě aplikována věta o střední hodnotě. Není těžké nahlédnout, že tento postup je možné použít i v případě funkcí tří a více proměnných. Matematickou indukcí lze pak tvrzení Schwarzovy věty rozšířit pro parciální derivace vyšších řádů funkce obecně n proměnných. Formulujeme proto bez důkazu následující větu.

Věta 3.11. *Jestliže jsou všechny smíšené parciální derivace řádu k funkce $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ spojité v bodě $[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*]$, pak jejich hodnota v tomto bodě nezávisí na pořadí derivování, ale pouze na tom, kolikrát jsme funkci f podle jednotlivých proměnných derivovali.*

Poznámka 3.12. Vrátíme-li se nyní zpět k příkladu 3.9, vidíme, že aplikace právě dokázané věty by nám usnadnila výpočet v tom smyslu, že bychom z požadovaných smíšených derivací počítali vždy jen jednu. Parciální derivace všech řádů funkce

$$f(x, y, z) = 3x^2y + \mathrm{e}^{x^2z} - 3\sin^2 z$$

totiž musí být spojitými funkcemi, což je dáno tím, že funkční vztah obsahuje funkci polynomiální, exponenciální a funkci sinus, jejichž derivace jsou vždy spojitými funkcemi. Při následném derivování se může ve výsledku objevit pouze součin těchto funkcí, resp. součin funkcí sinus a kosinus, což jsou ale opět ve všech případech spojité funkce.

Příklad 3.13. Vypočtěte parciální derivaci čtvrtého řádu f_{xxyz} funkce

$$f(x, y, z) = 3x^2y + \mathrm{e}^{x^2z} - 3\sin^2 z.$$

Řešení. Z toho, co jsme řekli v předcházející poznámce, víme, že parciální derivace všech řádů funkce f jsou spojitými funkcemi. Nezáleží tedy na pořadí derivování, ale pouze na tom, abychom dvakrát derivovali podle proměnné x a jednou podle proměnných y a z. Před zahájením výpočtu je užitečné se zamyslet nad tím, zda derivovat v předepsaném pořadí, a nebo pořadí derivování z nějakého důvodu změnit. Důvodem pro záměnu pořadí derivování bývá v takových případech obvykle usnadnění výpočtu. Ačkoli tento příklad není příliš složitý, přesto vidíme, že výpočet bude jednodušší, budeme-li nejdříve derivovat podle proměnné y a poté podle proměnné z. Takový postup totiž dává

$$f_y(x, y, z) = 3x^2,$$

z čehož je ihned zřejmé, že

$$f_{yz}(x, y, z) = 0,$$

a tedy i následná dvojnásobná derivace podle proměnné x musí dát stejný výsledek, tj. $f_{yzxx}(x, y, z) = 0$. Podle věty 3.11 ovšem víme, že zadaná derivace je rovna derivaci vypočtené, a tedy $f_{xxyz}(x, y, z) = 0$.

3.4 Úlohy k samostatnému řešení a kontrolní otázky

Cvičení 3.1. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x, y) = x^4 - x^3y^2 + yx^2 + y^4$.

Cvičení 3.2. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x, y) = \sin x \cos y$.

Cvičení 3.3. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$.

Cvičení 3.4. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{2yz} + \mathrm{e}^{3xz}$.

Cvičení 3.5. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(u, v, w) = (u + v) \operatorname{arctg}(uw)$.

Cvičení 3.6. Vypočtěte směrnice tečen ke grafu funkce dané vztahem $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ v bodě $B = [2, 1, 6]$, které jsou rovnoběžné s rovinami xz a yz.

Cvičení 3.7. Vypočtěte směrnice tečen ke grafu funkce dané vztahem $f(x, y) = \mathrm{e}^{(x^2-y^2)}$ v bodě $B = [1, 1, 1]$, které jsou rovnoběžné s rovinami xz a yz.

Cvičení 3.8. Je dáno $f(x, y, z) = \sin^2 x \cos y + \arctan y - \mathrm{e}^{xyz}$. Vypočtěte f_{xyz}.

Cvičení 3.9. Vypočtěte f_{yyz}, je-li dáno $f(x, y, z) = x^{yz}$.

Cvičení 3.10. Ověřte, že funkce $u = f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ je řešením rovnice $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

Otázka 3.1. Jak je definován pojem parciální derivace?

Otázka 3.2. Jakou má parciální derivace geometrickou interpretaci?

Otázka 3.3. Napadá vás, co by mohla naznačovat skutečnost, že obě parciální derivace funkce $f(x, y)$ jsou v daném bodě rovny nule?

Otázka 3.4. Jak je definována parciální derivace vyššího řádu?

Otázka 3.5. Uveďte postačující podmínku pro rovnost smíšených parciálních derivací v daném bodě?

Otázka 3.6. Kolik parciálních derivací 4. řádu má funkce čtyř proměnných?

Otázka 3.7. Uveďte příklad funkce, která splňuje předpoklady Věty 3.11 pro smíšené parciální derivace libovolného řádu. (Nápověda: Inspirujte se funkcí v Příkladu 3.9.)

Otázka 3.8. Dokážete uvést příklad funkce dvou proměnných, která má v daném bodě parciální derivaci podle proměnné x, ale ne podle y (popř. naopak)?

Otázka 3.9. Dokážete uvést příklad funkce, která v daném bodě nemá parciální derivace?

Otázka 3.10. Uveďte příklad funkce f dvou (případně i více) proměnných takové, že

(a) všechny její parciální derivace mají stejný definiční obor jako funkce f;

(b) alespoň jedna z jejích parciálních derivací má definiční obor, který je vlastní podmnožinou $\mathcal{D}f$ a alespoň jedna má definiční obor stejný jako funkce f;

(c) definiční obor každé z jejích parciálních derivací je vlastní podmnožinou $\mathcal{D}f$.

3.5 Výsledky úloh k samostatnému řešení a odpovědi na některé otázky

Cvičení 3.1. $f_x = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2xy$, $f_y = -2x^3y + x^2 + 4y^3$.

Cvičení 3.2. $f_x = \cos x \cos y$, $f_y = -\sin x \sin y$.

Cvičení 3.3. $f_x = \frac{2y}{(x+y)^2}$, $f_y = -\frac{2x}{(x+y)^2}$

Cvičení 3.4. $f_x = y\mathrm{e}^{xy} + 3z\mathrm{e}^{3xz}$, $f_y = x\mathrm{e}^{xy} + 2z\mathrm{e}^{2yz}$, $f_z = 2y\mathrm{e}^{2yz} + 3x\mathrm{e}^{3xz}$.

Cvičení 3.5. $f_u = \operatorname{arctg}(uw) + \frac{(u+v)w}{1+u^2w^2}$, $f_u = \operatorname{arctg}(uw)$, $f_w = \frac{(u+v)u}{1+u^2w^2}$.

Cvičení 3.6. Směrnice jsou dány hodnotami parciálních derivací v bodě B, tj. $f_x(2,1) = 4$ a $f_y(2,1) = 4$.

Cvičení 3.7. Směrnice jsou dány hodnotami parciálních derivací v bodě B, tj. $f_x(1,1) = 2$ a $f_y(1,1) = -2$.

Cvičení 3.8. $f_{xyz} = f_{zxy} = \mathrm{e}^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$.

Cvičení 3.9. $f_{yyz} = \ln^2 x(2zx^{yz} + yz^2x^{xy}\ln x), \quad [x,y,z] \in \mathbb{R}^3, x > 0$.

Cvičení 3.10. Je nutné spočítat parciální derivace druhého řádu vyskytující se v rovnici a dosazením ověřit její platnost.

Otázka 3.6. 4^4.

Otázka 3.8. Například funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} |y| & \text{je-li } [x,y] = [0,y], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tato funkce má v počátku parciální derivaci podle x rovnu nule. Nemá však v počátku parciální derivaci podle y.

3.6 Kontrolní test

Start testu **Parciální derivace**

1. Parciální derivace funkce $f(x,y) = (x + 5y\sin x)^{4/3}$ podle proměnných x a y mají tvar

- ☐ $\frac{4}{3}(1 + 5y\cos x)(x + 5y\sin x)^{1/3}$, $\frac{20}{3}\sin x(x + 5y\sin x)^{1/3}$
- ☐ $\frac{4}{3}(1 + 5y\cos x)(x + 5y\sin x)^{1/3}$, $\frac{15}{3}\sin x(x + 5y\sin x)^{1/3}$
- ☐ $\frac{4}{3}(x + 5y\cos x)(1 + 5y\sin x)^{1/3}$, $\frac{20}{3}\sin x(x + 5y\sin x)^{1/3}$

2. Při výpočtu parciální derivace funkce $f(x,y,z)$ podle proměnné z považujeme

- ☐ proměnnou z za konstantní
- ☐ proměnné x a y za konstantní
- ☐ proměnné x a z za konstantní
- ☐ proměnné y a z za konstantní

3. Parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \frac{(2x+y)}{z}$ podle proměnných x, y a z mají tvar

- ☐ $1/z$, $2/z$, $\frac{2x+y}{z^2}$
- ☐ $2/z$, $1/z$, $-\frac{2x+y}{z^2}$
- ☐ $2/z$, $1/z$, $\frac{2x+y}{z^2}$

4. Parciální derivace funkce $f_y(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ představuje z geometrického hlediska

- ☐ směrnici přímky ke grafu funkce f, která je rovnoběžná s rovinou yz a prochází bodem $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$
- ☐ směrnici tečné přímky ke grafu funkce f, která je rovnoběžná s rovinou xz a prochází bodem $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$
- ☐ směrnici tečné přímky ke grafu funkce f, která je rovnoběžná s rovinou yz a prochází bodem $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$

5. Směrnice tečny ke grafu funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ v bodě $[2,-3,-5/13]$, která je rovnoběžná s rovinou yz, má hodnotu

- ☐ $32/125$
- ☐ $48/169$
- ☐ $15/32$

6. Parciální derivace druhého řádu funkce $f(x, y) = \ln(x^3y^5 - 2)$ mají tvar

- ☐ $-\frac{3xy^5(4+x^3 2y^5)}{(x^3y^5-2)^2}$, $-\frac{30x^2y^3}{(x^3y^5-2)^2}$, $-\frac{5x^3y^3(8+x^3y^5)}{(x^3y^5-2)^2}$
- ☐ $-\frac{3xy^5(4+x^3y^5)}{(x^3y^5-2)^2}$, $-\frac{30x^2y^4}{(x^3y^5-2)^2}$, $-\frac{5x^3y^3(8+x^3y^5)}{(x^3y^5-2)^2}$
- ☐ $-\frac{3x^2y^5(4+x^3y^5)}{(x^3y^5-2)^2}$, $-\frac{30x^2y^4}{(x^3y^5-2)^2}$, $-\frac{5x^3y^3(8+x^2y^5)}{(x^3y^5-2)^2}$

7. Parciální derivace f_{zzx} funkce $f(x, y, z) = \cos(4x + 2y + 3z)$ má tvar

- ☐ $18\sin(4x + 2y + 3z)$
- ☐ $36\sin(4x + 2y + 3z)$
- ☐ $27\sin(4x + 2y + 3z)$

8. Rovnost smíšených parciálních derivací řádu k funkce n proměnných platí za předpokladu

- ☐ spojitosti parciálních derivací řádu k v daném bodě a daném pořadí v jakém jsme derivovali
- ☐ spojitostiparciálních derivací řádu k derivací v daném bodě
- ☐ spojitosti parciálních derivací řádu k v daném bodě a počtu derivací podle jednotlivých proměnných

9. Všechny parciální derivace třetího řádu funkce $f(x, y, z)$ jsou spojité v daném bodě. Uveďte maximální počet různých výsledků, které můžeme při výpočtu těchto parciálních derivací obdržet.

- ☐ 8
- ☐ 10
- ☐ 12

10. Je funkce $w = f(x, y, z) = (ax + by + cz)^n$, kde a, b, c jsou konstanty, řešením rovnice

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = nw?$$

- ☐ ano
- ☐ ne

Konec testu | Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek:

Procento úspěšnosti:

4 Diferenciál funkce, Taylorův polynom

Klíčová slova. Totální diferenciál, tečná rovina, normála plochy, diferenciály vyšších řádů, kmenová funkce, Taylorův polynom.

U funkce jedné proměnné diferenciálem funkce f v bodě x_0 rozumíme přírůstek funkční hodnoty na tečně vedené ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$. To znamená, že funkce f je v okolí bodu x_0 aproximována tečnou a k přibližnému stanovení funkční hodnoty v bodě "blízko" bodu x_0 nám stačí určit hodnotu na tečně. Pro funkci jedné proměnné nemá diferenciál příliš velký význam, protože existence diferenciálu neboli diferencovatelnost funkce je ekvivalentní existenci derivace v bodě x_0. U funkcí n ($n \geq 2$) proměnných je diferenciálem přírůstek funkce na tečné nadrovině vedené ke grafu funkce v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Geometrický význam diferenciálu je tedy podobný jako u funkce jedné proměnné. Otázkou je, zda diferencovatelnost funkce je zajištěna pouhou existencí parciálních derivací.

4.1 Totální diferenciál

Nejdříve se budeme zabývat pojmem diferenciálu pro funkce dvou proměnných.

Definice 4.1. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $P = [x_0, y_0]$ je v tomto bodě **diferencovatelná**, jestliže existují reálná čísla $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ taková, že platí

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (\mathcal{A}h + \mathcal{B}k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \tag{4.1}$$

Lineární funkce $\mathcal{A}h + \mathcal{B}k$ proměnných h, k se nazývá **totální** (neboli úplný) **diferenciál** funkce f v bodě $P = [x_0, y_0]$. Označujeme $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k)$, příp. $\mathrm{d}f(P)(h, k)$ nebo $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$.

Poznámka 4.2.

1. Ekvivalentně lze totální diferenciál definovat takto: řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $P = [x_0, y_0]$ totální diferenciál (je v bodě P diferencovatelná), je-li možno její přírůstek v okolí bodu P vyjádřit jako

$$\triangle f(x, y) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \mathcal{A}h + \mathcal{B}k + \rho\tau(h, k),$$

kde $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou konstanty, $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná v okolí bodu $[0, 0]$ a

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \tau(h, k) = 0.$$

2. Číslo h představuje přírůstek na ose x, číslo k přírůstek na ose y. Často se užívá značení $h = \mathrm{d}x = x - x_0$, $k = \mathrm{d}y = y - y_0$.

Věta 4.3. *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $P = [x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě parciální derivace prvního řádu a platí $\mathcal{A} = f_x(P)$, $\mathcal{B} = f_y(P)$, tj.*

$$\mathrm{d}f(P)(h, k) = f_x(P)h + f_y(P)k. \tag{4.2}$$

Důkaz. Položme ve vztahu (4.1) $h = 0$. Pak z (4.1) máme

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \mathcal{B}k}{\sqrt{k^2}} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \mathcal{B}k}{|k|} = 0.$$

Označme $\varphi(k) = f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)-\mathcal{B}k$. Dosazením $\varphi(k)$ do předchozího vztahu dostáváme

$$\lim_{k\to 0} \frac{\varphi(k)}{|k|} = 0.$$

S využitím věty 2.6 platí

$$\lim_{k\to 0} \frac{\varphi(k)}{|k|} \cdot \frac{|k|}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\varphi(k)}{k} = 0,$$

protože pro $h \neq 0$ je výraz $\frac{|k|}{k}$ ohraničený. Zpětným dosazením za $\varphi(k)$ a úpravou výrazu získáme

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} - \mathcal{B} = f_y(x_0, y_0) - \mathcal{B} = 0,$$

tj. $\mathcal{B} = f_y(x_0, y_0)$.
Obdobným postupem získáme rovnost $\mathcal{A} = f_x(x_0, y_0)$. $\diamond$

Poznámka 4.4. Na příkladu si ukážeme, že obrácená implikace neplatí. Mějme funkci definovanou předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad [x, y] \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro} \quad [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Parciální derivace v bodě $[0,0]$ určíme pomocí definice. Tedy

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2\cdot 0}{x^2+0^2}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

a podobně určíme $f_y(0,0) = 0$. Obě parciální derivace existují a jsou rovny 0. Aby tato funkce byla diferencovatelná v bodě $[0,0]$, musí platit vztah (4.1) z definice 4.1. Tudíž by v našem případě muselo platit, že

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(h,k)-f(0,0)-(0h+0k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Limitu budeme řešit převodem do polárních souřadnic. Tedy $h = r\cos\varphi$, $k = r\sin\varphi$ a

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^3} = \lim_{r\to 0^+} \cos^2\varphi\sin\varphi = cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Zjistili jsme, že výsledek závisí na úhlu φ, tedy daná limita vůbec neexistuje. Proto funkce f není v bodě $[0,0]$ diferencovatelná.

Z existence parciálních derivací funkce v bodě $[x_0,y_0]$ neplyne diferencovatelnost funkce. Přidáme-li však předpoklad spojitosti parciálních derivací, diferencovatelnost funkce dostáváme, viz následující věta.

Věta 4.5. *Má-li funkce f v bodě $P = [x_0,y_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu, pak je v tomto bodě diferencovatelná.*

Poznámka 4.6. Spojitost parciálních derivací je pouze postačující nikoli nutnou podmínkou pro existenci diferenciálu.

Dále z existence parciálních derivací funkce v bodě $[x_0,y_0]$ neplyne ani spojitost funkce.

Příklad 4.7. Funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x = 0 \text{ nebo } y = 0, \\ 0 & \text{pro} \quad \text{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $[0,0]$ obě první parciální derivace. Zavedeme si pomocné funkce $\mu(x) = f(x,0) = 1$ a $\nu(y) = f(0,y) = 1$. Spočteme jejich derivace v bodě $[0,0]$. Jelikož obě tyto funkce jsou konstantní, jejich derivace je rovna nule nejen v bodě $[0,0]$. Tedy $f_x(0,0) = \mu'(0) = 0$, $f_y(0,0) = \nu'(0) = 0$. V příkladu

2.36 (kapitola Limita a spojitost) jsme si ukázali, že funkce f je v bodě $[0,0]$ nespojitá, neboť v tomto bodě neexistuje limita.

Diferencovatelnost funkce je vlastností, která spojitost zaručí.

Věta 4.8. *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $P=[x_0,y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Funkce f je diferencovatelná v bodě $P=[x_0,y_0]$, tedy z definice máme

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\lim_{[h,k]\to[0,0]} \mathcal{A}h+\mathcal{B}k+\rho\tau(h,k)=0.$$

Z čehož plyne

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0),$$

tedy spojitost funkce f v bodě P. ◇

Poznámka 4.9. Opak této věty neplatí, tj. je-li funkce f spojitá, nemusí být diferencovatelná. Uvažujme opět příklad

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad [x,y]\neq[0,0],\\ 0 & \text{pro} \quad [x,y]=[0,0].\end{cases}$$

Z poznámky 4.4 víme, že daná funkce f není v bodě $[0,0]$ diferencovatelná. Avšak v příkladu 2.34 (kapitola Limita a spojitost) jsme si ukázali, že funkce f je v bodě $[0,0]$ spojitá.

Poznámka 4.10. Diferenciál lze využít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot

$$f(x,y)\doteq f(x_0,y_0)+\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k). \tag{4.3}$$

Geometrický význam diferenciálu

Nechť funkce $z=f(x,y)$ je diferencovatelná v bodě $P=[x_0,y_0]$. Z existence diferenciálu v bodě P vyplývá, že parciální derivace v bodě P existují. Z geometrického významu parciálních derivací víme, že $f_x(P)$, $f_y(P)$ představují směrnice tečen t_1 a t_2 sestrojených v bodě $T=[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ k řezům plochy $z=f(x,y)$ rovinou $y=y_0$, resp. $x=x_0$.
Určíme rovnici tečné roviny. Rovina v $\mathbb{R}^3$ o rovnici $z=\mathcal{A}x+\mathcal{B}y+\mathcal{C}$ se

nazývá ***tečnou rovinou*** ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$, kde $z_0 = f(x_0, y_0)$, jestliže

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x, y) - \mathcal{A}x - \mathcal{B}y - \mathcal{C}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Nyní ukážeme, že rovina určená těmito tečnami t_1, t_2 je tečnou rovinou ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.
Prochází-li tečná rovina bodem T, pak bod T musí vyhovovat rovnici roviny, tj. $f(x_0, y_0) = \mathcal{A}x_0 + \mathcal{B}y_0 + \mathcal{C}$, takže $\mathcal{C} = f(x_0, y_0) - \mathcal{A}x_0 - \mathcal{B}y_0$ a po dosazení do rovnice roviny máme

$$\begin{aligned} z &= \mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}y + f(x_0, y_0) - \mathcal{A}x_0 - \mathcal{B}y_0 \\ &= \mathcal{A}(x - x_0) + \mathcal{B}(y - y_0) + f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Tato rovina je tečnou rovinou, jestliže existuje totální diferenciál v bodě $P = [x_0, y_0]$, tj. podle věty 4.3 je $\mathcal{A} = f_x(P)$, $\mathcal{B} = f_y(P)$. Tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ je pak určena rovnicí

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

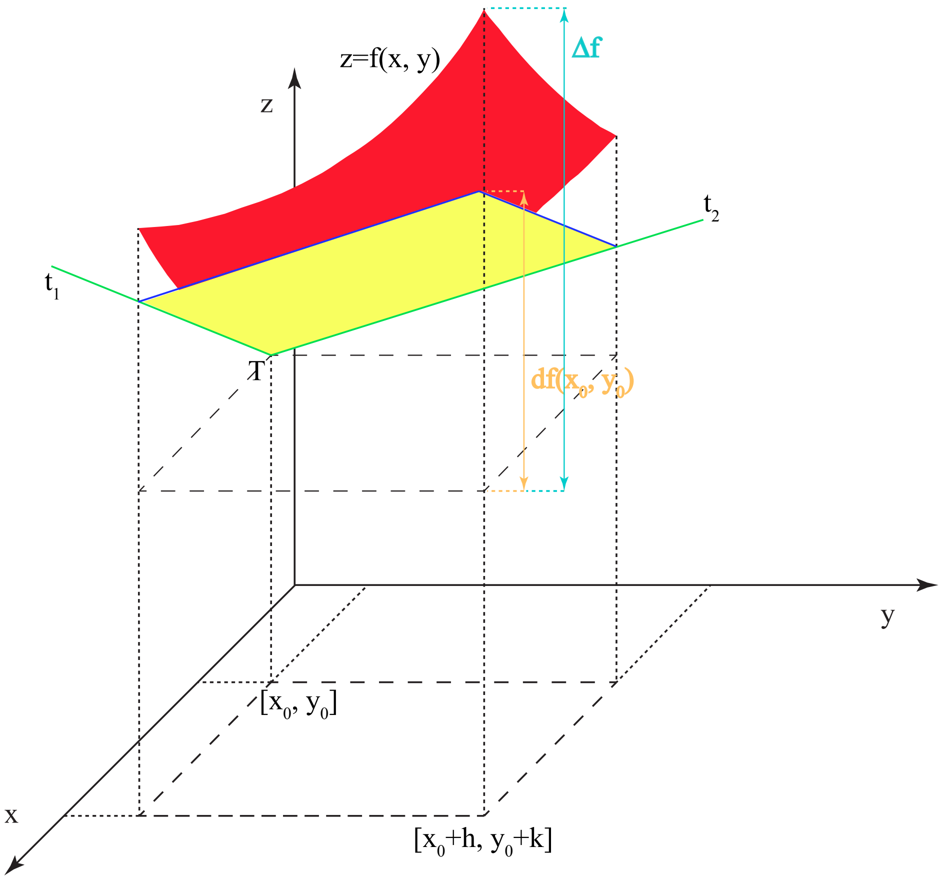
Přímka kolmá k tečné rovině plochy v jejím bodě dotyku T se nazývá ***normála plochy***, normála ke grafu funkce $z = f(x, y)$. Její směrový vektor je určen normálovým vektorem tečné roviny, tj. $(-f_x(x_0, y_0), -f_x(x_0, y_0), 1)$.
Porovnáme-li rovnici tečné roviny v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$ ke grafu funkce $z = f(x, y)$ se vzorcem pro totální diferenciál v bodě $P = [x_0, y_0]$, vidíme, že

$$z - z_0 = \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0).$$

To znamená, že hodnota diferenciálu funkce $z = f(x, y)$ v bodě P je rovna přírůstku třetí souřadnice, tj. $z - z_0$, tečné roviny k ploše o rovnici $z = f(x, y)$ v bodě T při přechodu z bodu $P = [x_0, y_0]$ do bodu $X = [x_0 + h, y_0 + k]$, viz obrázek 13.

Věta 4.11. *Tečná rovina plochy $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ existuje právě tehdy, když je funkce f diferencovatelná v bodě $P = [x_0, y_0]$. Rovnice tečné roviny v bodě T je dána vztahem*

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{4.4}$$



Obrázek 13: Diferenciál funkce

Věta 4.12. *Normála n ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě T je určena parametrickými rovnicemi*

$$\begin{aligned} n : x &= x_0 - f_x(x_0, y_0)t, \\ y &= y_0 - f_y(x_0, y_0)t, \\ z &= z_0 + t, \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde $t \in \mathbb{R}$.

Příklady

Příklad 4.13. Prověřte diferencovatelnost funkce $f(x,y) = 2x^2 + 3xy - 5y^2$ v bodě $P = [1,-1]$ a nalezněte její totální diferenciál v bodě P.

Řešení. Definiční obor zadané funkce je $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2$. Využijeme větu 4.5, která říká, že spojité parciální derivace funkce f v bodě P zaručují diferencovatelnost funkce f v bodě P. Spočteme první parciální derivace funkce f a dosadíme bod P, tj.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x + 3y, & f_y(x,y) &= 3x - 10y,\\ f_x(1,-1) &= 1, & f_y(1,-1) &= 13. \end{aligned}$$

Tyto funkce jsou spojité na celém definičním oboru $\mathcal{D}f$, tedy i v bodě P. Funkce f je diferencovatelná v bodě P.
Nalezneme totální diferenciál funkce f v bodě P. Podle vzorce (4.2) dostaneme

$$\mathrm{d}f(1,-1)(h,k) = f_x(1,-1)h + f_y(1,-1)k = h + 13k.$$

Další možnosti zápisu jsou

$$\mathrm{d}f(1,-1)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}x + 13\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}f(1,-1)(x-1,y+1) = (x-1) + 13(y+1) = x + 13y + 12.$$

Příklad 4.14. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$ v bodě $P = [-2,2]$ pro $h = 0{,}03$ a $k = 0{,}01$.

Řešení. Funkce f je definovaná pro $x \neq 0$ a $y \neq 0$, tedy definiční obor je $\mathcal{D}f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0, y \neq 0\}$. Spočteme první parciální derivace funkce f:

$$f_x(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2y}, \quad f_y(x,y) = -\frac{x^2+y^2}{xy^2}.$$

Protože derivace jsou na $\mathcal{D}f$ spojité, totální diferenciál existuje.
Jelikož $f_x(-2,2) = 1$, $f_y(-2,2) = 1$, dosazením do vzorce (4.2) dostáváme

$$\mathrm{d}f(-2,2)(0{,}03, 0{,}01) = f_x(-2,2)0{,}03 + f_y(-2,2)0{,}01 = 0{,}03 + 0{,}01 = 0{,}04.$$

Příklad 4.15. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \ln(1+\frac{x}{y})$ v obecném bodě.

Řešení. Funkce f je definovaná pro $1 + \frac{x}{y} = \frac{x+y}{y} > 0$. Tedy definiční obor je $\mathcal{D}f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; (y > -x \wedge y > 0) \vee (y < -x \wedge y < 0)\}$. Spočteme první parciální derivace funkce f:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x}{y}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{xy+y^2}.$$

Derivace jsou na $\mathcal{D}f$ spojité, totální diferenciál existuje. Dosazením do vzorce (4.2) dostáváme

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = f_x(x,y)h + f_y(x,y)k = \frac{1}{x+y}h - \frac{x}{xy+y^2}k.$$

Příklad 4.16. Pomocí totálního diferenciálu přibližně vypočtěte $0{,}98^2 \cdot \mathrm{e}^{0{,}13}$.

Řešení. Označme $f(x,y) = x^2\mathrm{e}^y$. Máme určit $f(0{,}98, 0{,}13)$. Zvolme bod $[x_0, y_0] = [1, 0]$ a spočteme diference $h = x - 1 = -0{,}02$, $k = y - 0 = 0{,}13$. Podle vztahu (4.3) platí

$$f(0{,}98, 0{,}13) \doteq f(1,0) + \mathrm{d}f(1,0)(-0{,}02, 0{,}13).$$

Ze vztahu (4.2) dostaneme

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = 2x\mathrm{e}^y h + x^2\mathrm{e}^y k,$$

$$\mathrm{d}f(1,0)(-0{,}02, 0{,}13) = 2 \cdot (-0{,}02) + 1 \cdot 0{,}13 = 0{,}09.$$

Celkově tedy

$$0{,}98^2 \cdot \mathrm{e}^{0{,}13} = f(0{,}98, 0{,}13) \doteq f(1,0) + \mathrm{d}f(1,0) = 1 + 0{,}09 = 1{,}09.$$

Pro porovnání hodnota spočtená na kalkulátoru je $f(0{,}98, 0{,}13) = 1{,}093\,73\ldots$.

Příklad 4.17. Určete rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $T = [4, -3, ?]$.

Řešení. Dopočteme třetí souřadnici bodu T: $z_0 = f(x_0, y_0) = f(4, -3) = 5$. Spočteme parciální derivace prvního řádu v bodě $P = [4, -3]$, tj.

$$f_x(P) = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{[4,-3]} = \frac{4}{5}, \quad f_y(P) = \left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{[4,-3]} = -\frac{3}{5}.$$

Ze spojitosti parciálních derivací v bodě $P = [4, -3]$ plyne existence totálního diferenciálu v tomto bodě a tudíž i existence tečné roviny. Rovnici tečny získáme dosazením do vzorce (4.4), tj.

$$z - 5 = \frac{4}{5}(x-4) - \frac{3}{5}(y+3) \Rightarrow \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - z = 0.$$

Normála ke grafu funkce f má dle vzorce (4.5) parametrické vyjádření

$$n : x = 4 - \frac{4}{5}t, \quad y = -3 + \frac{3}{5}t, \quad z = 5 + t,$$

kde $t \in \mathbb{R}$.

Nyní se budeme zabývat pojmem diferenciálu funkce n-proměnných. Tedy rozšíříme definici diferenciálu funkcí dvou proměnných.

Definice 4.18. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in \mathbb{R}^n$ je v tomto bodě diferencovatelná, jestliže existuje $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n) \in \mathbb{R}^n$ takové, že pro $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ dostatečně malé platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*) - \langle \mathcal{A}, h \rangle}{\|h\|} = 0, \tag{4.6}$$

kde $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}$ a $\langle \mathcal{A}, h \rangle = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i h_i$ je skalární součin v $\mathbb{R}^n$. Lineární funkci $\mathrm{d}f(x^*)(h) = \langle \mathcal{A}, h \rangle$ nazýváme **totálním diferenciálem** funkce f v bodě x^*.

Obdoba věty 4.5 a věty 4.8 platí i pro diferenciál funkcí n proměnných. Z toho odvodíme, že $f_{x_i}(x^*) = \mathcal{A}_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Pak je totální diferenciál v bodě x^* dán výrazem

$$\mathrm{d}f(x^*)(h) = f_{x_1}(x^*)h_1 + f_{x_2}(x^*)h_2 + \cdots + f_{x_n}(x^*)h_n. \tag{4.7}$$

Příklad 4.19. Určete diferenciál funkce $f(x, y, z) = (xy)^{\frac{1}{z}}$ v obecném bodě.

Řešení. Funkce f je definována pro $z \neq 0$ a $xy > 0$. Tedy definiční obor je $\mathcal{D}f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; xy > 0, z \neq 0\}$. Parciální derivace prvního řádu

$$f_x(x, y, z) = \frac{(xy)^{\frac{1}{z}}}{zx}, \quad f_y(x, y, z) = \frac{(xy)^{\frac{1}{z}}}{zy}, \quad f_z(x, y, z) = -\frac{(xy)^{\frac{1}{z}} \ln(xy)}{z^2}$$

jsou spojité na $\mathcal{D}f$. Totální diferenciál existuje. Dosadíme do vzorce (4.7) a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x, y, z)(h_1, h_2, h_3) &= f_x(x, y, z)h_1 + f_y(x, y, z)h_2 + f_z(x, y, z)h_3 = \\ &= \frac{(xy)^{\frac{1}{z}}}{zx} h_1 + \frac{(xy)^{\frac{1}{z}}}{zy} h_2 - \frac{(xy)^{\frac{1}{z}} \ln(xy)}{z^2} h_3. \end{aligned}$$

4.2 Diferenciály vyšších řádů

Nyní se budeme zabývat diferenciály vyšších řádů pro funkce více proměnných. Připomeňme, že m-tý diferenciál funkce jedné proměnné v bodě x_0 se značí $\mathrm{d}^m f(x_0)h$ a platí $\mathrm{d}^m f(x_0)h = f^m(x_0)h^m$, kde h je přírůstek. Existence diferenciálu m-tého řádu je ekvivalentní existenci m-té derivace funkce f v bodě x_0.

Podrobný postup odvození diferenciálu m-tého řádu funkcí n proměnných naleznete v [11]. Zde pro jednoduchost uvedeme jen výsledek, který nejprve zformulujeme pro funkci dvou proměnných.

Definice 4.20. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace až do řádu m, které jsou v tomto bodě spojité. **Totálním diferenciálem *m*-tého řádu** funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ rozumíme homogenní funkci m-tého stupně

$$\mathrm{d}^m f(x_0, y_0)(h, k) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x_0, y_0)h^j k^{m-j}. \tag{4.8}$$

Pomocí vztahu (4.8) si zapíšeme totální diferenciály m-tého řádu pro $m = 1, 2, 3$.
Pro $m = 1$ je vzorec $\mathrm{d}^m f$ totožný se vztahem (4.2), tj. vzorec pro totální diferenciál

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

Pro $m = 2$ dostaneme totální diferenciál druhého řádu

$$\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)(h, k) = f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2.$$

Pro $m = 3$ dostaneme totální diferenciál třetího řádu

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}^3 f(x_0, y_0)(h, k) = \\ &= f_{xxx}(x_0, y_0)h^3 + 3f_{xxy}(x_0, y_0)h^2k + 3f_{xyy}(x_0, y_0)hk^2 + f_{yyy}(x_0, y_0)k^3. \end{aligned}$$

Poznámka 4.21. Ve snadnějším zapamatování vztahu (4.8) nám pomůže rozvoj mocniny dvojčlenu $(a+b)^m$ podle binomické věty a formální umocnění $\mathrm{d}^m f$ psáno následovně $\mathrm{d}^m f(x_0, y_0)(h, k) = (\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k)^m f(x_0, y_0)$.

Pro $m = 2$ je $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Nyní formálně umocníme $(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k)^2$

a roznásobíme f. Tedy

$$\mathrm{d}^2 f(x_0,y_0)(h,k) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x_0,y_0) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)hk + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)k^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2.$$

Poznámka 4.22. Pro případ n proměnných je diferenciál m-tého řádu homogenní funkce n proměnných $h = (h_1, \ldots, h_n)$

$$\mathrm{d}^m f(x^*)(h) = \sum_{j_1+\ldots+j_n=m} \frac{m!}{j_1! \ldots j_n!} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}(x^*) h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n}.$$

Tento vztah lze formálně zapsat následovně

$$\mathrm{d}^m f(x^*)(h) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^m f(x^*), \tag{4.9}$$

přičemž po normálním umocnění nahradíme součiny $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{j_i} f(x^*)$ členy $\frac{\partial^{j_i} f}{\partial x_i^{j_i}}(x^*)$, $i = 1, \ldots, n$.

Příklad 4.23. V obecném bodě určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení. Definiční obor funkce f je $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. Funkce f má na $\mathcal{D}f$ spojité parciální derivace druhého řádu, z čehož plyne existence diferenciálu. Vypočítáme parciální derivace druhého řádu

$$f_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f_{xx}(x,y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Parciální derivace druhého řádu dosadíme do vzorce (4.8) a dostáváme

$$\mathrm{d}^2 f(x,y)(h,k) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}h^2 + 2\frac{(-2)xy}{(x^2+y^2)^2}hk + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}k^2.$$

Příklad 4.24. V bodě $[-2,1,0]$ určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y,z) = x^2(y^3 + \mathrm{e}^{-z})$.

Řešení. Definiční obor funkce f je $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^3$. Budeme potřebovat parciální derivace druhého řádu. A jelikož jsou na $\mathcal{D}f$ spojité, nezávisí na pořadí derivování.

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= 2x(y^3 + \mathrm{e}^{-z}), \qquad & f_{xx}(x,y,z) &= 2(y^3 + \mathrm{e}^{-z}),\\
& & f_{xy}(x,y,z) &= 6xy^2,\\
& & f_{xz}(x,y,z) &= -2x\mathrm{e}^{-z},\\
f_y(x,y,z) &= 3x^2y^2, & f_{yy}(x,y,z) &= 6x^2y,\\
& & f_{yz}(x,y,z) &= 0,\\
f_z(x,y,z) &= -x^2\mathrm{e}^{-z}, & f_{zz}(x,y,z) &= x^2\mathrm{e}^{-z}.
\end{aligned}
$$

Nyní spočteme hodnoty druhých derivací v bodě $[1,1,1]$

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(-2,1,0) &= 4, \qquad & f_{xy}(-2,1,0) &= -12, \qquad & f_{xz}(-2,1,0) &= 4,\\
f_{yy}(-2,1,0) &= 24, & f_{yz}(-2,1,0) &= 0, & f_{zz}(-2,1,0) &= 4.
\end{aligned}
$$

Dosadíme do vzorce (4.9) pro diferenciál druhého řádu a dostáváme

$$
\mathrm{d}^2 f(-2,1,0)(h_1,h_2,h_3) = f_{xx}(-2,1,0)h_1^2 + f_{yy}(-2,1,0)h_2^2 + f_{zz}(-2,1,0)h_3^2 +
$$

$$
\begin{aligned}
&+2f_{xy}(-2,1,0)h_1h_2 + 2f_{xz}(-2,1,0)h_1h_3 + 2f_{yz}(-2,1,0)h_2h_3 =\\
&= 4h_1^2 + 24h_2^2 + 4h_3^2 - 24h_1h_2 + 8h_1h_3.
\end{aligned}
$$

4.3 Kmenové funkce

Je dána dvojice funkcí dvou proměnných $P(x,y)$ a $Q(x,y)$. Položme si otázku, kdy výraz $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce, tj. kdy existuje funkce $f(x,y)$ taková, že $\mathrm{d}f(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$. Funkce $f(x,y)$ se pak nazývá ***kmenová funkce***.

Věta 4.25. *Nechť funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ mají spojité parciální derivace na jednoduše souvislé oblasti $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak výraz*

$$
P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y
$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce na množině M právě tehdy, když platí

$$
P_y(x,y) = Q_x(x,y) \quad \textit{pro každé } [x,y] \in M.
$$

Příklad 4.26. Rozhodněte, zda výraz $(2x \ln y + 5y)\mathrm{d}x + (\frac{x^2}{y} + 5x + 3)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce. Pokud ano, určete tuto (kmenovou) funkci.

Řešení. Příklad budeme řešit pro $y > 0$. Nejprve ověříme, zda je zadaný výraz opravdu diferenciálem. Označíme $P(x, y) = 2x \ln y + 5y$ a $Q(x, y) = \frac{x^2}{y} + 5x + 3$. Podle věty 4.25 musí platit, že $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$. Spočteme parciální derivace

$$P_y(x, y) = \frac{2x}{y} + 5, \qquad Q_x(x, y) = \frac{2x}{y} + 5.$$

a dostaneme, že $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$. Zadaný výraz je tedy diferenciálem jisté kmenové funkce f. Dále platí

$$f(x, y) = \int (2x \ln y + 5y)\mathrm{d}x = x^2 \ln y + 5xy + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ je integrační konstantou, neboť její derivace podle x je nulová. Derivováním funkce f podle proměnné y a dosazením do vztahu $f_y = Q$ dostáváme

$$f_y = \frac{x^2}{y} + 5x + \varphi'(y) = \frac{x^2}{y} + 5x + 3,$$

odtud máme, že $\varphi'(y) = 3$, tedy $\varphi(y) = 3y + c$. Spočetli jsme, že zadaný výraz je diferenciálem funkce

$$f(x, y) = x^2 \ln y + 5xy + 3y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

4.4 Krokovaný příklad

Příklad. Určete totální diferenciál třetího řádu funkce $f(x,y) = \frac{1}{x} + \sqrt{y}$ v bodě $[x_0, y_0] = [-1, 1]$.

Řešení.

Vypočteme nejprve všechny parciální derivace až do řádu tři.

Parciální derivace podle x

$f_x(x,y) =$ -1/x^{2} ?, $f_{xx}(x,y) =$?, $f_{xy}(x,y) =$?,

$f_{xxx}(x,y) =$?, $f_{xxy}(x,y) =$?, $f_{xyy}(x,y) =$?.

Parciální derivace podle y

$f_y(x,y) =$?, $f_{yy}(x,y) =$?, $f_{yx}(x,y) =$?,

$f_{yyy}(x,y) =$?, $f_{yyx}(x,y) =$?, $f_{yxx}(x,y) =$?.

Potřebné parciální derivace v bodě $[-1, 1]$

$f_{xxx}(-1,1) =$?, $f_{xxy}(-1,1) =$?,

$f_{xyy}(-1,1) =$?, $f_{yyy}(-1,1) =$?.

Totální diferenciál třetího řádu v bodě $[-1, 1]$

$$\mathrm{d}^3\mathrm{f}(-1,1) = f_{xxx}(-1,1)h^3 + 3f_{xxy}(-1,1)h^2k + 3f_{xyy}(-1,1)hk^2 + f_{yyy}(-1,1)k^3$$

$$= \boxed{}\,?\,h^3 + 3\boxed{}\,?\,h^2 + 3\boxed{}\,?\,hk^2 + \boxed{}\,?\,k^3.$$

4.5 Taylorův polynom

Na závěr kapitoly si budeme definovat Taylorův polynom pro funkce dvou a více proměnných. Taylorův polynom se používá k přibližnému výpočtu funkčních hodnot funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v okolí bodu $x^* \in \mathbb{R}^n$. Taylorova věta udává velikost chyby, které se dopustíme při aproximaci funkce Taylorovým polynomem.
Pro funkce dvou proměnných platí následující věta.

Věta 4.27. (Taylorova) *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v nějakém okolí $\mathcal{O}(P)$ bodu $P = [x_0, y_0]$ spojité parciální derivace řádu $m + 1$, $m \in \mathbb{N}$. Pak pro každý bod $[x, y]$ z tohoto okolí $\mathcal{O}(P)$ platí*

$$f(x, y) = T_m(x, y) + R_m(x, y), \tag{4.10}$$

kde

$$\begin{aligned} T_m(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k\right) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2\right) + \\ &+ \ldots + \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j}\partial y^j}(x_0, y_0)h^{m-j}k^j, \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$R_m(x, y) = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-j}\partial y^j}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h^{m+1-j}k^j$$

a kde $h = x - x_0$, $k = y - y_0$, $\theta \in (0, 1)$.

Poznámka 4.28.

1. Vzorec (4.10) se nazývá Taylorův vzorec řádu m, polynom T_m Taylorův polynom řádu m a R_m zbytek v Taylorově vzorci.

2. Pomocí diferenciálů zapíšeme Taylorův polynom (4.11) takto

$$\begin{aligned} T_m(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)(h, k) + \\ &+ \ldots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x_0, y_0)(h, k) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \mathrm{d}^i f(x_0, y_0)(h, k), \tag{4.12}$$

kde $\mathrm{d}^0 f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, a zbytek $R_m(x, y)$ takto

$$R_m(x, y) = \frac{1}{(m+1)!} \mathrm{d}^{m+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)(h, k). \tag{4.13}$$

3. Taylorův vzorec pak lze zapsat pomocí diferenciálů následovně

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \mathrm{d}^i f(x_0, y_0)(h, k) + \frac{1}{(m+1)!} \mathrm{d}^{m+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)(h, k),$$

tedy

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \mathrm{d}^i f(x_0, y_0)(h, k) + R_m(x, y). \tag{4.14}$$

Příklad 4.29. V bodě $[2, -1]$ najděte Taylorův vzorec druhého řádu funkce $f(x, y) = x^3 y + y^3$.

Řešení. Podle (4.14) bude platit

$$f(x, y) = f(2, -1) + \mathrm{d}f(2, -1)(h, k) + \frac{1}{2} \mathrm{d}^2 f(2, -1)(h, k) + R_2(x, y),$$

kde $h = x - 2$, $k = y + 1$ a $R_2(x, y) = \frac{1}{3!} \mathrm{d}^3 f(2 + \theta h, -1 + \theta k)(h, k)$. Označíme $\nu = 2 + \theta h$ a $\mu = -1 + \theta k$.
Funkce f má spojité parciální derivace až do třetího řádu v libovolném bodě $\mathbb{R}^2$, tedy nezávisí na pořadí derivování.

$$\begin{array}{lll}
f_x(x, y) = 3x^2 y, & f_{xx}(x, y) = 6xy, & f_{xxx}(x, y) = 6y, \\
f_y(x, y) = x^3 + 3y^2, & f_{yy}(x, y) = 6y, & f_{yyy}(x, y) = 6, \\
 & f_{xy}(x, y) = 3x^2, & f_{xxy}(x, y) = 6x, \\
 & & f_{xyy}(x, y) = 0.
\end{array}$$

Po dosazení bodu $[2, -1]$ vyjde

$$\begin{array}{lll}
f(-2, 1) = -9, & f_x(-2, 1) = -12, & f_{xx}(-2, 1) = -12, \\
f_y(-2, 1) = 11, & f_{yy}(-2, 1) = -6, & f_{xy}(-2, 1) = 12.
\end{array}$$

Diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu druhého řádu (4.12) mají tvar:

$$\mathrm{d}f(2, -1)(h, k) = f_x(2, -1)h + f_y(2, -1)k = -12(x - 2) + 11(y + 1),$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 f(2,-1)(h,k) &= f_{xx}(2,-1)h^2 + 2f_{xy}(2,-1)hk + f_{yy}(2,-1)k^2 = \\ &= -12(x-2)^2 + 24(x-2)(y+1) - 6(y+1)^2. \end{aligned}$$

Taylorův polynom je

$$T_2(x,y) = f(2,-1) + \mathrm{d}f(2,-1)(x-2,y+1) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(2,-1)(x-2,y+1) =$$

$$= -9 - 12(x-2) + 11(y+1) - 6(x-2)^2 + 12(x-2)(y+1) - 3(y+1)^2.$$

Abychom vyjádřili Taylorův zbytek podle vzorce (4.13), potřebujeme diferenciál třetího řádu, tj.

$$\mathrm{d}^3 f(\nu,\mu)(h,k) = 6\mu h^3 + 3(6\nu)h^2k + 6k^3.$$

Pak

$$R_2(x,y) = \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3 f(\nu,\mu)(x-2,y+1) = \mu(x-2)^3 + 3\nu(x-2)^2(y+1) + (y+1)^3.$$

Celkově pro funkci $f(x,y)$ dostáváme

$$\begin{aligned} f(x,y) &= T_2(x,y) + R_2(x,y) = \\ &= -9 - 12(x-2) + 11(y+1) - 6(x-2)^2 + 12(x-2)(y+1) - \\ &- 3(y+1)^2 + \mu(x-2)^3 + 3\nu(x-2)^2(y+1) + (y+1)^3. \end{aligned}$$

Příklad 4.30. Najděte Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[x_0, y_0] = [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ pro funkci $f(x,y) = \frac{\sin y}{\sin x}$.

Řešení. Podle vzorce (4.11) bude platit

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right) + f_x\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)h + f_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)k) + \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)h^2 + f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)hk + \frac{1}{2}f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)k^2. \end{aligned}$$

Vypočítáme parciální derivace do druhého řádu. Jelikož všechny vypočtené derivace budou v bodě $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ spojité, nebude záviset na pořadí derivování.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\frac{\cos x \sin y}{\sin^2 x}, & f_{xx}(x,y) &= \frac{\sin y(1+\cos^2 x)}{\sin^3 x}, \\ f_y(x,y) &= \frac{\cos y}{\sin x}, & f_{xy}(x,y) &= -\frac{\cos x \cos y}{\sin^2 x}, \\ & & f_{yy}(x,y) &= -\frac{\sin y}{\sin x}. \end{aligned}$$

Po dosazení za h a k do vzorce (4.11) máme

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right) + f_x\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + f_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right) + \\
&+ \frac{1}{2}f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right) + \\
&+ \frac{1}{2}f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2 = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2 = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(x^2-y^2) - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\left(1+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{5\sqrt{2}}{64}\pi^2 - \frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Příklad 4.31. Pomocí Taylorova polynomu druhého řádu přibližně vypočtěte $0{,}98^2 \cdot \mathrm{e}^{0{,}13}$. Výsledek porovnejte s hodnotou získanou pomocí diferenciálu z příkladu 4.16.

Řešení. Použijeme Taylorův polynom druhého stupně $T_2(x,y) \doteq f(x,y)$. Zvolíme funkci $f(x,y) = x^2 \cdot \mathrm{e}^y$, bod $[x_0,y_0] = [1,0]$ a spočteme diference $h = -0{,}02$, $k = 0{,}13$. Nejdříve spočteme požadované parciální derivace funkce $f(x,y) = x^2 \cdot \mathrm{e}^y$, tj.

$$f_x(x,y) = 2x\mathrm{e}^y, \quad f_{xx}(x,y) = 2\mathrm{e}^y, \quad f_{xy}(x,y) = 2x\mathrm{e}^y,$$
$$f_y(x,y) = x^2\mathrm{e}^y, \quad f_{yy}(x,y) = x^2\mathrm{e}^y.$$

Taylorův polynom ze vzorce (4.11) po dosazení za h a k je

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) + \frac{1}{2}f_{xx}(1,0)(x-1)^2 + \\
&+ f_{xy}(1,0)(x-1)(y-0) + \frac{1}{2}f_{yy}(1,0)(y-0)^2 = \\
&= 1 + 2(x-1) + y + (x-1)^2 + 2(x-1)y + y^2.
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
&0{,}98^2 \cdot \mathrm{e}^{0{,}13} \doteq 1 + 2(-0{,}02) + 0{,}13 + (-0{,}02)^2 + 2(-0{,}02)0{,}13 + 0{,}13^2 = \\
&= 1 - 0{,}04 + 0{,}13 + 0{,}0004 - 0{,}0052 + 0{,}0169 = 1{,}1021.
\end{aligned}$$

Pro porovnání hodnota vypočtená pomocí diferenciálu je $f(0{,}98, 0{,}13) \doteq 1{,}09$ (viz příklad 4.16).

Na závěr kapitoly si zavedeme Taylorův polynom pro obecný případ funkce n proměnných.

Věta 4.32. *Nechť funkce* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *má v nějakém okolí* $\mathcal{O}(x^*)$ *bodu* $x^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*]$ *spojité parciální derivace řádu* $m+1$, $m \in \mathbb{N}$. *Pak pro libovolné dostatečně malé* $h = x - x^*$ *existuje* $\theta \in (0,1)$ *takové, že platí*

$$\begin{aligned} f(x^*+h) &= f(x^*) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(x^*)(h) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x^*)(h) + \\ &+ \ldots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x^*)(h) + R_m(x), \end{aligned} \tag{4.15}$$

kde

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x^* + \theta h)(h). \tag{4.16}$$

Poznámka 4.33. Výraz (4.15) nazýváme Taylorův vzorec řádu m nebo také Taylorova formule. Hodnota $R_m(x)$ ze vztahu (4.16) se nazývá Taylorův zbytek. Polynom

$$T_m(x) = f(x^*) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(x^*)(h) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x^*)(h) + \ldots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x^*)(h), \tag{4.17}$$

se nazývá Taylorův polynom m-tého řádu funkce f v bodě x^*. V případě, že $x^* = [0, \ldots, 0]$, mluvíme o vzorci (4.15) jako o Maclaurinově vzorci.

Příklad 4.34. Pro funkci $f(x,y,z) = x^2(y^3 + \mathrm{e}^{-z})$ najděte Taylorův polynom druhého řádu se středem $[x_0, y_0, z_0] = [-2, 1, 0]$.

Řešení. Definiční obor funkce f je $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^3$. Podle vzorce (4.17) bude platit

$$T_2(x,y,z) = f(-2,1,0) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(-2,1,0)(h) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(-2,1,0)(h),$$

kde $h = (h_1, h_2, h_3)$ a $h_1 = x+2$, $h_2 = y-1$, $h_3 = z$. Budeme potřebovat parciální derivace do druhého řádu. A jelikož jsou na $\mathcal{D}f$ spojité, nezávisí na pořadí derivování. Parciální derivace prvního i druhého řádu pro funkci f již byly spočteny v příkladu 4.24 a také byl spočten diferenciál druhého řádu. Tyto výpočty nyní použijeme při dosazování do vzorců jednotlivých diferenciálů. Tedy iferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar:

$$\mathrm{d}^0 f(-2,1,0)(h) = f(-2,1,0) = 8,$$

$$\mathrm{d}f(-2,1,0)(h) = -8h_1 + 12h_2 - 4h_3,$$

$$\mathrm{d}^2 f(-2,1,0)(h) = 4h_1^2 + 24h_2^2 + 4h_3^2 - 24h_1h_2 + 8h_1h_3.$$

Spočtené diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom a dostáváme

$$\begin{aligned} T_2(x,y,z) &= 8+\frac{1}{1!}[-8h_1+12h_2-4h_3]+ \\ &+ \frac{1}{2!}[4h_1^2+24h_2^2+4h_3^2-24h_1h_2+8h_1h_3]. \end{aligned}$$

Po dosazení za h_1, h_2 a h_3 máme

$$\begin{aligned} T_2(x,y,z) &= 8+\frac{1}{1!}[-8(x+2)+12(y-1)-4z]+ \\ &+ \frac{1}{2!}[4(x+2)^2+24(y-1)^2+4z^2-24(x+2)(y-1)+ \\ &+ 8(x+2)z]= \\ &= 2x^2+12y^2+2z^2-12xy+4xz+12x-36y+4z+24. \end{aligned}$$

4.6 Krokovaný příklad

Příklad. Určete Taylorův polynom třetího stupně se středem $[x_0, y_0] = [-1, 1]$ pro funkci $f(x, y) = \frac{1}{x} + \sqrt{y}$.
Řešení.
Vypočteme nejprve všechny potřebné parciální derivace.
Parciální derivace podle x

$f_x(x, y) = \boxed{}\,?$, $f_{xx}(x, y) = \boxed{}\,?$, $f_{xy}(x, y) = \boxed{}\,?$,

$f_{xxx}(x, y) = \boxed{}\,?$, $f_{xxy}(x, y) = \boxed{}\,?$, $f_{xyy}(x, y) = \boxed{}\,?$.

Parciální derivace podle y

$f_y(x, y) = \boxed{}\,?$, $f_{yy}(x, y) = \boxed{}\,?$, $f_{yx}(x, y) = \boxed{}\,?$,

$f_{yyy}(x, y) = \boxed{}\,?$, $f_{yyx}(x, y) = \boxed{}\,?$, $f_{yxx}(x, y) = \boxed{}\,?$.

Taylorova věta se středem v bodě $[-1, 1]$

$$
\begin{aligned}
&T_3(x, y) = f(-1, 1) + f_x(-1, 1)(x + 1) + f_y(-1, 1)(y - 1) + \\
&+\frac{1}{2}[f_{xx}(-1, 1)(x + 1)^2 + 2f_{xy}(-1, 1)(x + 1)(y - 1) + f_{yy}(-1, 1)(y - 1)^2] + \\
&+\frac{1}{3!}[f_{xxx}(-1, 1)(x + 1)^3 + 3f_{xxy}(x + 1)^2(y - 1) + \\
&+3f_{xyy}(-1, 1)(x + 1)(y - 1)^2 + f_{yyy}(-1, 1)(y - 1)^3]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_3(x, y) = &\boxed{}\,?\,x^3 + \boxed{}\,?\,y^3 - \boxed{}\,?\,x^2 - \\
-&\boxed{}\,?\,y^2 - \boxed{}\,?\,x + \boxed{}\,?\,y - \boxed{}\,?
\end{aligned}
$$

4.7 Úlohy k samostatnému řešení a kontrolní otázky

Cvičení 4.1. Pomocí totálního diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{3{,}01 \cdot 0{,}99}$.

Cvičení 4.2. Rozhodněte, zda je funkce $f(x, y) = x^2 + y \cos x$ diferencovatelná v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$.

Cvičení 4.3. Určete totální diferenciál funkce $f(x, y) = xy \ln(x+y)$ v obecném bodě.

Cvičení 4.4. Určete totální diferenciál funkce $f(x, y) = \frac{x \cos y - y \cos x}{1+\sin x + \sin y}$ v bodě $[0, 0]$.

Cvičení 4.5. V bodě $[-2, 3]$ určete tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce $f(x, y) = x\mathrm{e}^{3x+2y}$.

Cvičení 4.6. Na grafu funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ najděte bod, v němž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $\rho : 12x + 3y - z = 0$. Určete rovnici normály v tomto bodě.

Cvičení 4.7. Určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x, y) = x^{(x+y)}$ v bodě $[1, 1]$.

Cvičení 4.8. V bodě $[-4, \frac{\pi}{2}, 0]$ určete totální diferenciál třetího řádu funkce $f(x, y, z) = 2^x \sin y \operatorname{arctg} z$.

Cvičení 4.9. Zjistěte, zda daný výraz $(y - \frac{\sin^2 y}{x^2})\mathrm{d}x + (x + \frac{\sin 2y}{x} + 1)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce. Pokud ano, určete ji.

Cvičení 4.10. Určete Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[-1, 1]$ pro funkci $f(x, y) = \ln \frac{1-x+y}{1+x+y}$.

Otázka 4.1. Jak se definuje totální diferenciál funkce dvou proměnných a jaký je jeho geometrický význam?

Otázka 4.2. Jak hledáme tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce dvou proměnných?

Otázka 4.3. Jak definujeme diferenciál m-tého řádu pro funckce tří proměnných?

Otázka 4.4. Co je to kmenová funkce?

Otázka 4.5. Porovnejte totální diferenciál funkce jedné proměnné s totálním diferenciálem funkce dvou proměnných z hlediska jejich geometrického významu.

Otázka 4.6. Co je to Taylorův vzorec?

Otázka 4.7. Co je to Taylorův polynom?

4.8 Výsledky úloh k samostatnému řešení

Cvičení 4.1. $\frac{299}{100\sqrt{3}}$ pro bod $[x_0, y_0] = [3, 1]$

Cvičení 4.2. funkce je diferencovatelná

Cvičení 4.3. $\frac{(x+y)y\ln(x+y)+xy}{x+y}h + \frac{(x+y)x\ln(x+y)+xy}{x+y}k$

Cvičení 4.4. $\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = h - k$

Cvičení 4.5. tečná rovina $5x + 4y + z = 0$; normála $x = -2 + 5t$, $y = 3 + 4t$, $z = -2 + t$, kde $t \in \mathbb{R}$

Cvičení 4.6. $P = [\frac{-12}{\sqrt{154}}, \frac{-3}{\sqrt{154}}]$

Cvičení 4.7. $\mathrm{d}^2 f(1,1)(h,k) = 4h^2 + 2hk$

Cvičení 4.8. $\mathrm{d}^3 f(-4, \frac{\pi}{2}, 0)(h_1, h_2, h_3) = -\frac{1}{8}h_3^3 + \frac{3}{16}\ln^2 2 h_1^2 h_3 - \frac{3}{16}h_2^2 h_3$

Cvičení 4.9. $f(x,y) = yx + \frac{\sin^2 y}{x} + y + c$, kde $c \in \mathbb{R}$

Cvičení 4.10. $T_2(x,y) = \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}y^2 + \frac{10}{9}xy - \frac{14}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{8}{9} + \ln 3$

4.9 Kontrolní test

Start testu **Diferenciál**

1. Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte (s přesností na dvě desetinná místa) $4{,}21^2 \cdot 0{,}85^3 =$ ☐

2. Pomocí Taylorova polynomu druhého stupně vypočtěte (s přesností na dvě desetinná místa) $4{,}21^2 \cdot 0{,}85^3 =$ ☐ .

3. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \ln(\sin(xy^2))$ v obecném bodě.

   (a) $\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = y\,\mathrm{tg}(x^2y)h - xy\,\mathrm{tg}(x^2y)k$
   (b) $\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = y^2\,\mathrm{tg}(y^2x)h + 2xy\,\mathrm{tg}(y^2x)k$
   (c) $\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = y\sin(y^2x)h - xy\cos(x^2y)k$
   (d) $\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = x^2\cos(y^2x)h + 2xy\,\mathrm{tg}(y^2x)k$

4. Určete tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce $f(x,y) = \cos(2x+3y)$ v bodě $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, ?]$.

   (a) Tečná rovina má rovnici

   ☐ $2x + 3y - z - \frac{3}{2}\pi = 0$ ☐ $3x + 2y + z - 5 = 0$
   ☐ $-2x - 3y - z + 1 = 0$ ☐ $-3x - 2y - z - 1 = 0$

   (b) Normála má rovnici

   ☐ $x = \frac{\pi}{4} + 3t, y = \frac{\pi}{3}, z = 1 + t$ ☐ $x = \frac{\pi}{3} - 3t, y = \frac{\pi}{3} - 2t, z = 1 - t$
   ☐ $x = \frac{\pi}{4} - 2t, y = \frac{\pi}{3} - 3t, z = t$ ☐ $x = \frac{\pi}{4} + 2t, y = \frac{\pi}{3} + 3t, z = t$

   (c) Třetí souřadnice bodu T má hodnotu

   ☐ 1 ☐ -1
   ☐ 0 ☐ 2

5. Určete Taylorův polynom třetího řádu se středem v bodě $[0,1]$ pro funkci $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2}\ln y^3$.

   (a) $T_3(x,y) = x - \frac{3}{2}(y-1) - 2(y-1)^2 + 3x(y-1)^2 + x^3 + (y-1)^3$
   (b) $T_3(x,y) = 3x - 2x^2 + 3x(y-1)^2 + (y-1)^3$
   (c) $T_3(x,y) = 3(y-1) - \frac{3}{2}(y-1)^2 + 3x^2(y-1) + (y-1)^3$
   (d) $T_3(x,y) = x - \frac{1}{2}(y-1) - 3x^2(y-1) + x^3 + (y-1)^3$

6. Určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y,z) = \frac{xy}{z}$ v bodě $[1,2,3]$.

   (a) $\mathrm{d}^2f(1,2,3)(h_1,h_2,h_3) = \frac{1}{9}h_2^2 - \frac{2}{27}h_2h_3 + \frac{5}{9}h_1^2 + \frac{4}{9}h_1h_3$
   (b) $\mathrm{d}^2f(1,2,3)(h_1,h_2,h_3) = \frac{1}{9}h_1^2 + \frac{1}{3}h_2^2 - \frac{1}{9}h_3^2 - \frac{2}{3}h_2h_3 + \frac{5}{27}h_1h_2 + \frac{7}{27}h_1h_3$
   (c) $\mathrm{d}^2f(1,2,3)(h_1,h_2,h_3) = \frac{2}{9}h_2^2 - \frac{2}{27}h_2h_3 + \frac{5}{3}h_1h_2 - \frac{4}{9}h_1h_3$

(d) $\mathrm{d}^2 f(1,2,3)(h_1,h_2,h_3) = \frac{4}{27}h_3^2 + \frac{2}{3}h_1h_2 - \frac{4}{9}h_1h_3 - \frac{2}{9}h_2h_3$

7. Rozhodněte, zda daný výraz $(\frac{y^4}{x} - \cos y)\mathrm{d}x + (4y^3 \ln x + x \sin y + 5)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce.

(a) (a) ano (b) ne

(b) Pokud ano, funkce je

(a) $f(x,y) = y^2 + \ln x - y \sin x + 5y + c$
(b) $f(x,y) = y^3 \ln x - y \sin x - 5x + c$
(c) $f(x,y) = y^4 \ln x - x \cos y + 5y + c$
(d) $f(x,y) = y^3 \ln x - y \cos x - 5x + c$

8. Rozhodněte, zda následující věta platí:
Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě diferencovatelná.

(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí

9. Rozhodněte, zda následující věta platí:
Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$ právě tehdy, když je v tomto bodě diferencovatelná.

(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí

10. Rozhodněte, zda následující věta platí:
Má-li funkce f v daném bodě totální diferenciál, pak jsou v tomto bodě první parciální derivace funkce f spojité.

(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí

Konec testu Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek:

Procento úspěšnosti:

Zobrazení správného výsledku:

5 Parciální derivace složených funkcí

Klíčová slova. Složená funkce, vnitřní složka, vnější složka.

5.1 Pravidla pro derivování složených funkcí

Nejdříve bychom rádi připomněli pravidlo pro derivaci složené funkce jedné proměnné. Jsou-li dány funkce $y = f(x)$ a $x = g(t)$, přičemž f a g jsou diferencovatelné, můžeme proměnnou y chápat jako funkci proměnné t, kdy závislost je zprostředkovaná prostřednictvím funkcí f a g. Vztah pro derivaci proměnné y v závislosti na t můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Podoba pravidla pro derivaci složené funkce více proměnných je analogií výše uvedeného vztahu. Dříve než jej zformulujeme, uvedeme definici složené funkce více proměnných pro případ, kdy všechny složky složené funkce jsou funkcemi dvou proměnných.

Definice 5.1. Nechť jsou funkce $u = g(x, y)$ a $v = h(x, y)$ definovány na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, přičemž množina všech příslušných bodů $[u, v]$ leží v množině $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, na které je definována funkce $z = f(u, v)$. Pak je na množině Ω definována funkce

$$z = F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y)),$$

kterou nazýváme **složenou funkcí**. Funkce g, h nazýváme jejími **vnitřními složkami** a funkci f její **vnější složkou**.

Příklad 5.2. Uvažujme funkci $z = \cos(x + y) + \sin(x - y)$.

Tuto funkci můžeme chápat jako složenou funkci, jejíž vniřní složky jsou funkce $u = g(x, y) = x + y$ a $v = h(x, y) = x - y$. Vnější složkou je pak funkce $z = f(u, v) = \cos u + \sin v$. Definičním oborem všech složek je prostor $\mathbb{R}^2$. Ovšem v případě vnitřních složek uvažujeme tuto množinu v proměnných x, y, kdežto v případě vnějších složky v proměnných u a v.

Poznámka 5.3. Podobně jako pro funkce dvou proměnných můžeme definovat předpisem

$$w = F(x, y, z) = f(g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z))$$

složenou funkci tří proměnných, přičemž jejími vnitřními složkami jsou funkce $u_1 = g_1(x, y, z)$, $u_2 = g_2(x, y, z)$ a $u_3 = g_3(x, y, z)$ a vnější složkou je funkce $w = f(u_1, u_2, u_3)$. Obecně je pak předpisem

$$z = F(x_1, x_2 ..., x_n) = f(g_1(x_1, x_2 ..., x_n), g_2(x_1, x_2 ..., x_n), ..., g_m(x_1, x_2 ..., x_n))$$

definovaná složená funkce n proměnných, jejímiž vnitřními složkami jsou funkce $u_k = g_k(x_1, x_2 ..., x_n)$, $1 \leq k \leq m$ a vnější složkou je funkce m proměnných $z = f(u_1, u_2, ..., u_m)$.

Jestliže se nyní dostáváme k otázce formulovat vztah pro derivování složené funkce více proměnných, je zapotřebí si uvědomit, že jeho tvar bude zřejmě záviset na tom, kolik proměnných mají vnitřní a vnější složky složené funkce. Není tedy možné hovořit o jednom konkrétním vztahu, ale o více vztazích, které budou ovšem mít analogickou strukturu. Nejprve formulujeme pravidlo pro derivaci složené funkce více proměnných pro případ, kdy vnější i vnitřní složky složené funkce jsou funkce dvou proměnných.

Věta 5.4. *Nechť funkce $u = g(x, y)$ a $v = h(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu na otevřené množině Ω a funkce $z = f(u, v)$ je diferencovatelná v každém bodě otevřené množiny Γ. Potom za předpokladů uvedených v předcházející definici má složená funkce $z = F(x, y) = f(g(x, y), k(x, y))$ na množině Ω parciální derivace prvního řádu a platí vztahy*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad a \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Důkaz. Dokážeme pouze platnost prvního vztahu, protože je zřejmé, že druhý vztah by se dokazoval zcela obdobným způsobem. Začneme tím, že přírůstek $\triangle z$ funkce $z = f(u, v)$ vyjádříme ve tvaru

$$\triangle z = f(u + p_1, v + p_2) - f(u, v),$$

kde p_1, p_2 jsou přírůstky proměnných u, v. Je užitečné si nyní uvědomit, že proměnná z je prostřednictvím funkcí u a v závislá na proměnných x a y. Proto můžeme přírůstky p_1, p_2 uvažovat jako funkce proměnných x a y a psát je ve tvaru

$$p_1 = g(x + q, y) - g(x, y), \qquad p_2 = h(x + q, y) - h(x, y),$$

kde q je přírůstek proměnné x (přírůstek proměnné y nyní neuvažujeme, protože dokazujeme vztah pro derivaci složené funkce podle proměnné x).

Z definice diferencovatelnosti funkce f plyne existence funkce $\tau(p_1, p_2)$ splňující podmínku $\lim \tau(p_1, p_2) = 0$ pro $(p_1, p_2) \to (0, 0)$ takové, že

$$f(u + p_1, v + p_2) - f(u, v) = f_u \cdot p_1 + f_v \cdot p_2 + \tau(p_1, p_2)\sqrt{p_1^2 + p_2^2}.$$

Při limitním přechodu pro $q \to 0$ dostáváme

$$\lim_{q\to 0} \frac{\triangle z}{q} = f_u \lim_{q\to 0} \frac{g(x + q, y) - g(x, y)}{q} + f_v \lim_{q\to 0} \frac{h(x + q, y) - h(x, y)}{q} +$$

$$+ \lim_{q\to 0} \frac{1}{q}\tau(p_1, p_2)\sqrt{p_1^2 + p_2^2} = f_u \cdot g_x + f_v \cdot h_x + \lim_{q\to 0} \frac{1}{q}\tau(p_1, p_2)\sqrt{p_1^2 + p_2^2}.$$

Zbývá ukázat, že poslední limita je nulová. Pro $q \neq 0$ máme

$$\frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}{q} = \operatorname{sgn} q \sqrt{\left(\frac{g(x + q, y) - g(x, y)}{q}\right)^2 + \left(\frac{h(x + q, y) - h(x, y)}{q}\right)^2}.$$

Nulovost uvažované limity nyní vyplývá ze vztahů

$$\lim_{q\to 0} \sqrt{\left(\frac{g(x + q, y) - g(x, y)}{q}\right)^2 + \left(\frac{h(x + q, y) - h(x, y)}{q}\right)^2} = \sqrt{g_x^2 + h_x^2},$$

$$\lim_{q\to 0} \tau(p_1, p_2) = \lim_{(p_1,p_2)\to(0,0)} \tau(p_1, p_2) = 0$$

a z toho, že výraz $\operatorname{sgn} q$ je ohraničený. ◇

Poznámka 5.5. Jsou-li funkce g, h závislé pouze na jednom argumentu, pak je složená funkce $z = F(x, y) = f(g(x), h(x))$ funkcí proměnné x. V důsledku toho přejdou ve vztahu pro výpočet derivace této složené funkce parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ v obyčejné derivace, takže obdržíme vztah

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

Příklad 5.6. Vypočtěte derivaci složené funkce $z = uv^2 + u^2v$, kde $u = \sin x$, $v = \cos x$.

Řešení. Podle poznámky 5.5 dostáváme využitím uvedeného vztahu

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = (v^2 + 2uv) \cdot \cos x + (2uv + u^2) \cdot (-\sin x) =$$

$$= \cos^3 x + 2\cos^2 x \sin x - 2\sin^2 x \cos x - \sin^3 x.$$

Obdržený výsledek je možné ještě dále upravit. Tyto úpravy však již ponecháváme na čtenáři.

Příklad 5.7. Vypočtěte parciální derivace složené funkce $z = \mathrm{e}^u \sin v$, kde $u = xy^2$, $v = x^2 y$, podle proměnných x a y.

Řešení. Při výpočtu využijeme vztahy dané větou 5.4, přičemž dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^u \sin v \cdot y^2 + \mathrm{e}^u \cos v \cdot 2xy \\
&= y^2 \mathrm{e}^{xy^2} \sin(x^2 y) + 2xy\mathrm{e}^{xy^2} \cos(x^2 y), \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^u \sin v \cdot 2xy + \mathrm{e}^u \cos v \cdot x^2 \\
&= 2xy\mathrm{e}^{xy^2} \sin(x^2 y) + x^2 \mathrm{e}^{xy^2} \cos(x^2 y).
\end{aligned}$$

Na závěr odstavce pojednávajícího o parciálních derivacích složené funkce uvedeme obecný tvar pravidla pro jejich výpočet. Pravidlo formulujeme pro složenou funkci, jejíž vnější složka má m proměnných a každá její vnitřní složka je funkcí n proměnných. Budeme vycházet z označení, které jsme zavedli v poznámce 5.3. Důkaz příslušných vztahů by byl jen technicky náročnější analogií důkazu věty 5.4, a proto jej neuvádíme.

Věta 5.8. *Nechť jsou funkce* $u_1 = g_1(x_1, ..., x_n)$,...,$u_m = g_m(x_1, ..., x_n)$ *spojitě diferencovatelné na oblasti* Ω *a funkce* $z = f(u_1, ..., u_m)$ *je spojitě diferencovatelná na oblasti* Γ. *Potom je složená funkce*

$$z = F(x_1, .., x_n) = f(g_1(x_1, .., x_n), ..., g_m(x_1, .., x_n))$$

na oblasti Ω *spojitě diferencovatelná a pro její parciální derivace podle jednotlivých proměnných platí vztahy*

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}$$

pro všechna $j = 1, ..., n$.

Příklad 5.9. Napište vztahy pro parciální derivace funkce $z = f(u, v, x, y)$, kde $u = g_1(s, t)$, $v = g_2(s, t)$, $x = g_3(s, t)$, $y = g_4(s, t)$.

Řešení. Jedná se o speciální případ věty 5.8, kdy $m = 4$, $n = 2$, přičemž $x_1 = s$, $x_2 = t$. Dostáváme tedy vztahy

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Příklad 5.10. Vypočtěte parciální derivace funkce $w = xy + xz + yz$, kde $x = s + t$, $y = s - t$, $z = st$.

Řešení. Přihlédneme-li ke struktuře vztahů, vidíme, že proměnná w je funkcí proměnných s a t prostřednictvím proměnných x, y a z. Vidíme tedy, že budeme nejdříve derivovat podle každé ze tří „zprostředkovávajících" proměnných a následně pak vždy podle jedné ze dvou nezávislých proměnných. Dostáváme tedy

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = (y+z)\cdot 1 + (x+z)\cdot 1 + (x+y)\cdot t =$$
$$= s - t + st + s + t + st + 2st = 2s(2t+1),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = (y+z)\cdot 1 + (x+z)\cdot(-1) + (x+y)\cdot s =$$
$$= s - t + st - s - t - st + 2s^2 = 2(s^2 - t).$$

Poznámka 5.11. Ve všech příkladech, které jsme v této kapitole uvedli, byla známá vnější složka složené funkce. V takovém případě je možné získat výsledek přímým derivováním, jestliže do vnější složky dosadíme příslušné vnitřní složky. V předcházejícím příkladu jsme tedy mohli psát

$$w = (s+t)(s-t) + (s+t)st + (s-t)st = s^2 - t^2 + 2s^2t.$$

Odtud ihned vidíme, že

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 2s + 4st = 2s(1+2t), \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -2t + 2s^2 = 2(s^2 - t).$$

Vnější složka ale známá být nemusí a pak už se bez použití pravidel pro derivování složených funkcí neobejdeme. Odvozené vztahy mají široké využití např. při řešení rovnic z oblasti matematické fyziky. Zde se často můžeme setkat s rovnicemi, ve kterých se vyskytují parciální derivace neznámé funkce. Řešením těchto tzv. *parciálních diferenciálních rovnic* je nějaká funkce dvou, případně více proměnných. Obvykle je však nutné využívat při hledání řešení těchto rovnic transformací, které umožňují převést řešenou rovnici na tvar vhodnější pro její další studium. Právě při těchto transformacích se využívá vzorců pro derivování složených funkcí. Následující příklad je jednoduchou ukázkou takového postupu.

Příklad 5.12. Transformujte rovnici $xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = 0$ do polárních souřadnic $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ za předpokladu spojitosti parciálních derivací prvního řádu funkce f.

Řešení. Máme

$$z = F(r,\phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi).$$

Podle vztahů uvedených ve větě 5.4 platí

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = f_x\cos\phi + f_y\sin\phi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} = -f_x r\sin\phi + f_y r\cos\phi.$$

Vynásobíme-li první rovnici výrazem $r\cos\phi$ a druhou výrazem $\sin\phi$, dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial r} r\cos\phi = f_x r\cos^2\phi + f_y r\sin\phi\cos\phi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi}\sin\phi = -f_x r\sin^2\phi + f_y r\sin\phi\cos\phi$$

a po odečtení druhé rovnice od první vyjde

$$\frac{\partial z}{\partial r} r\cos\phi - \frac{\partial z}{\partial \phi}\sin\phi = f_x r.$$

Analogicky pak po vynásobení první rovnice výrazem $r\sin\phi$ a druhé výrazem $\cos\phi$ a jejich následném sečtení získáme

$$\frac{\partial z}{\partial r} r\sin\phi + \frac{\partial z}{\partial \phi}\cos\phi = f_y r.$$

Výsledky, které jsme obdrželi, nám umožňují transformovat výraz $xf_x(x,y) + yf_y(x,y)$ do polárních souřadnic. Dostáváme

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = r\cos\phi f_x(x,y) + r\sin\phi f_y(x,y) =$$

$$= \cos\phi\left(\frac{\partial z}{\partial r} r\cos\phi - \frac{\partial z}{\partial \phi}\sin\phi\right) + \sin\phi\left(\frac{\partial z}{\partial r} r\sin\phi + \frac{\partial z}{\partial \phi}\cos\phi\right) = r\frac{\partial z}{\partial r}.$$

Zadaná rovnice má tedy v polárních souřadnicích tvar

$$r\frac{\partial z}{\partial r} = 0.$$

5.2 Úlohy k samostatnému řešení a kontrolní otázky

Cvičení 5.1. Uvažujte funkci $z = \mathrm{e}^{st^2}\cos(s^2 t)$ jako složenou funkci a určete její vnitřní složky a vnější složku.

Cvičení 5.2. Uvažujte funkci $z = t^2 \operatorname{arctg}(t^2 s\mathrm{e}^t)$ jako složenou funkci a určete její vnitřní složky a vnější složku.

Cvičení 5.3. Pomocí vzorců pro derivaci složené funkce vypočtěte $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, jestliže $z = x^2 + y^2$, $x = t^4$, $y = t^3$.

Cvičení 5.4. Pomocí vzorců pro derivaci složené funkce vypočtěte $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$, jestliže $w = \sin(x+y) + \cos(y+z)$, $x = \mathrm{e}^t$, $y = t$, $z = \sqrt{t}$.

Cvičení 5.5. Pomocí vzorců pro derivaci složené funkce vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, jestliže $z = x^2 - y^2$, $x = s\cos t$, $y = t\sin s$.

Cvičení 5.6. Pomocí vzorců pro derivaci složené funkce vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, jestliže $z = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$, $x = st$, $y = s/t$.

Cvičení 5.7. Pomocí vzorců pro derivaci složené funkce vypočtěte $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ a $\frac{\partial w}{\partial u}$, jestliže $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = s\sin t$, $y = u\sin s$, $z = t\sin u$.

Cvičení 5.8. Pomocí vzorců pro derivaci složené funkce vypočtěte $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$, jestliže $w = \sin xyz$, $x = s^2 r$, $y = r^2 s$, $z = r - s$.

Cvičení 5.9. Pomocí vzorců pro derivaci složené funkce vypočtěte $\frac{\partial w}{\partial s}$, jestliže $w = \mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{xz} + \mathrm{e}^{yz}$, $x = s\cos t$, $y = s\sin t$, $z = \mathrm{e}^{st}$.

Cvičení 5.10. Nechť $z = f(x,y)$ je diferencovatelná funkce. Vyjádřete výraz $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2$ v polárních souřadnicích.

Otázka 5.1. Jak je definován pojem složená funkce?

Otázka 5.2. Je rozklad funkce na vnější a vnitřní složky dán jednoznačně?

Otázka 5.3. Na čem závisí struktura vztahu pro výpočet parciální derivace složené funkce?

Otázka 5.4. Formulujte pro procvičení různé verze pravidla ve větě 5.8 na základě konkrétně zvolených hodnot m a n.

Otázka 5.5. Zamyslete se nad způsobem výpočtu parciálních derivací vyšších řádů pro složené funkce.

5.3 Výsledky úloh k samostatnému řešení

Cvičení 5.1. Vnitřními složkami dané funkce jsou funkce $x = st^2$ a $y = s^2t$. Vnější složkou je funkce $z = \mathrm{e}^x \cos y$.

Cvičení 5.2. Vnitřními složkami dané funkce jsou funkce $x = t^2$ a $y = s\mathrm{e}^t$. Vnější složkou je funkce $z = x \operatorname{arctg}(xy)$.

Cvičení 5.3. $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 2t^5(4t^2 + 3)$.

Cvičení 5.4. $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \cos(\mathrm{e}^t + t)(\mathrm{e}^t + 1) - \sin(t + \sqrt{t})(1 + 1/2\sqrt{t})$.

Cvičení 5.5. $\frac{\partial z}{\partial s} = 2s\cos^2 t + t^2 \sin(2s)$, $\frac{\partial z}{\partial t} = s^2 \sin(2t) - t\sin(2s)$.

Cvičení 5.6. $\frac{\partial z}{\partial s} = t\mathrm{e}^{s/t} + \frac{s}{t^2}\mathrm{e}^{st}$, $\frac{\partial z}{\partial s} = s\mathrm{e}^{s/t} - \frac{s^2}{t^3}\mathrm{e}^{st}$.

Cvičení 5.7. $\frac{\partial z}{\partial s} = 2s\sin^2 t + t^2\sin(2s)$, $\frac{\partial z}{\partial t} = s^2\sin(2t) + 2t\sin^2 u$,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = t^2\sin(2u) + 2u\sin^2 s.$$

Cvičení 5.8. $\frac{\partial w}{\partial r} = (4s^3r^3 - 3s^4r^2)\cos(s^3r^3(r-s))$,
$\frac{\partial w}{\partial s} = (3s^2r^4 - 4s^3r^3)\cos(s^3r^3(r-s))$.

Cvičení 5.9. $\frac{\partial w}{\partial s} = -(y\mathrm{e}^{xy} + z\mathrm{e}^{xz})\sin t + (x\mathrm{e}^{xy} + z\mathrm{e}^{yz})\cos t + (x\mathrm{e}^{xz} + z\mathrm{e}^{xz})t\mathrm{e}^{st}$.

Cvičení 5.10. $(\frac{1\partial z}{r\partial\phi})^2 + (\frac{\partial z}{\partial r})^2$.

5.4 Kontrolní test

Start testu **Parciální derivace složených funkcí**

1. Uvažujeme-li funkci $f(x,y) = r^3 s^3 t + \frac{1}{rst^3}$ jako složenou funkci, můžeme její složky psát ve tvaru

   - [ ] vnější složka $w = x^2 y + yz$,
     vnitřní složky $x = rst,\ y = s/t,\ z = 1/rt$
   - [ ] vnější složka $w = x^2 y + yz^2$,
     vnitřní složky $x = rst,\ y = rs/t,\ z = 1/rst$
   - [ ] vnější složka $w = xy + yz^2$,
     vnitřní složky $x = rs,\ y = rs/t,\ z = 1/st$

2. Je-li dáno $z = \ln(xy)$ a $x = t^4$, $y = \sqrt[3]{t+2}$ pak je derivace $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ dána vztahem

   - [ ] $\frac{4}{t^2} + \frac{1}{3(t+2)}$
   - [ ] $\frac{4}{t} + \frac{1}{3(t+2)}$
   - [ ] $\frac{4}{t} + \frac{1}{3(t+2)^{2/3}}$

3. Je-li dáno $w = x^2 + y^2 + z^2$ a $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, pak je derivace $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ dána vztahem

   - [ ] $2t$
   - [ ] $3t$
   - [ ] $3t/2$

4. Je-li dáno $z = (x^2+y^2)^{3/2}$ a $x = \mathrm{e}^{-t}\sin s$, $y = \mathrm{e}^{-t}\cos s$, pak jsou parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial t}$ a $\frac{\partial z}{\partial s}$ dány vztahy

   - [ ] $-3x(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\sin s - 3y(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\cos s$,
     $3x(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\sin s - 3y(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\cos s$
   - [ ] $-3x(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\cos s - 3y(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\sin s$,
     $3x(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\cos s - 3y(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\sin s$
   - [ ] $-3x(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\sin s - 3y(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\cos s$,
     $3x(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\cos s - 3y(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\sin s$

5. Je-li funkce $w = f(x,y,z)$ diferencovatelná a $x = x(r,s,t)$, $y = y(r,s,t)$, $z = z(r,s,t)$, pak je parciální derivace $\frac{\partial w}{\partial s}$ dána vztahem

   - [ ] $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial s}$
   - [ ] $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s}$

☐ $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$

6. Je-li dáno $w = \mathrm{e}^{x+y+z}$ a $x = st$, $y = rt$ a $z = rs$, pak jsou parciální derivace $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ a $\frac{\partial w}{\partial s}$dány vztahy

☐ $\frac{\partial w}{\partial r} = (r+t)\mathrm{e}^{(st+rt+rs)}$, $\frac{\partial w}{\partial s} = (s+t)\mathrm{e}^{(st+rt+rs)}$, $\frac{\partial w}{\partial t} = (r+s)\mathrm{e}^{(st+rt+rs)}$
☐ $\frac{\partial w}{\partial r} = (s+t)\mathrm{e}^{(st+rt+rs)}$, $\frac{\partial w}{\partial s} = (r+t)\mathrm{e}^{(st+rt+rs)}$, $\frac{\partial w}{\partial t} = (r+s)\mathrm{e}^{(st+rt+rs)}$
☐ $\frac{\partial w}{\partial r} = (s+t)\mathrm{e}^{(st+rt+rs)}$, $\frac{\partial w}{\partial s} = (r+s)\mathrm{e}^{(st+rt+rs)}$, $\frac{\partial w}{\partial t} = (r+t)\mathrm{e}^{(st+rt+rs)}$

7. Je-li funkce $w = f(x, y, z)$ diferencovatelná a $x = r\sin\phi\cos\psi$, $y = r\sin\phi\sin\psi$ a $z = r\cos\phi$, pak je jedna z parciálních derivací $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial \phi}$ a $\frac{\partial w}{\partial \psi}$ dána vztahem

☐ $\frac{\partial w}{\partial x}\sin\phi\cos\psi + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\phi\sin\psi - \frac{\partial w}{\partial z}\cos\phi$
☐ $\frac{\partial w}{\partial x}r\cos\phi\cos\psi + \frac{\partial w}{\partial y}r\cos\phi\sin\psi + \frac{\partial w}{\partial z}r\sin\phi$
☐ $-\frac{\partial w}{\partial x}r\sin\phi\sin\psi + \frac{\partial w}{\partial y}r\sin\phi\cos\psi$

8. Nechť je funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná, $x = \mathrm{e}^u\cos v$, $y = \mathrm{e}^u\sin v$. Jestliže vyjádříme výraz $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2$ v souřadnicích u a v dostaneme

☐ $\mathrm{e}^{-2u}(\frac{\partial z}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2$
☐ $\mathrm{e}^{-2u}[(\frac{\partial z}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2]$
☐ $(\frac{\partial z}{\partial u})^2 + \mathrm{e}^{-2u}(\frac{\partial z}{\partial v})^2$

9. Nechť f je diferencovatelná funkce tří proměnných, přičemž máme dáno $w = f(x-y, y-z, z-x)$. Rozhodněte o tom, zda funkce w splňuje rovnici $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

☐ ano
☐ ne

10. Výška válce roste rychlostí 2 centimetry za minutu, zatímco jeho poloměr klesá rychlostí 0.5 centimetru za minutu. Je objem válce rostoucí veličina v okamžiku, kdy je vysoký 10 cm a má průměr 12cm?

☐ ano
☐ ne

Konec testu | Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek: ☐

Procento úspěšnosti: ☐

6 Derivace v daném směru

Klíčová slova. Směrová derivace, gradient.

Na úvod připomeňme, že parciální derivace funkce dvou proměnných podle proměnné x, resp. y jsou dány vztahy

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Víme již, že tyto limity představují směrnice jistých tečen. Sklon těchto tečen nám naznačuje, jak rychle se hodnoty dané funkce mění v dostatečné blízkosti bodu $[x_0, y_0]$. Je ale zapotřebí mít na paměti, že parciální derivace nám tuto informaci podávají, jen pokud se z bodu $[x_0, y_0]$ pohybujeme po přímce ve směru jedné ze souřadnicových os. O chování funkce při pohybu po jiných přímkách jdoucích bodem $[x_0, y_0]$ nemáme tedy žádné informace. Chceme-li obdobné informace získat také o rychlosti změny funkčních hodnot při pohybu libovolným směrem, je zapotřebí zvolit obecnější přístup než ten, se kterým jsme při definici parciálních derivací vystačili. Za tímto účelem se zavádí pojem směrová derivace (derivace v daném směru)

6.1 Směrové derivace a gradient

Definice 6.1. Nechť je funkce $f(x, y)$ definovaná na oblasti Ω, ve které leží bod $[x_0, y_0]$, a nechť $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Jestliže existuje limita tvaru

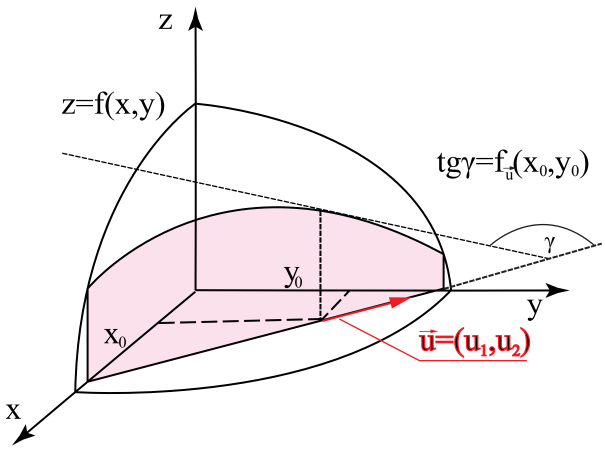
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hu_1,y_0+hu_2)-f(x_0,y_0)}{h},$$

nazýváme ji **směrovou derivací** funkce $f(x, y)$ ve směru vektoru $\vec{u}$ v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0).$$

Poznámka 6.2. Parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle proměnných x a y jsou speciálními případy pojmu směrová derivace, kdy vektor $\vec{u}$ má souřadnice (1,0) pro f_x a (0,1) pro f_y.

V případě, že chceme dát geometrickou interpretaci pojmu směrová derivace, je nutné si nejdříve uvědomit, že délka vektoru $\vec{u}$ má vliv na hodnotu směrové derivace. Lze totiž ukázat, že existuje-li v daném bodě směrová derivace $f_{\vec{u}}$, pak pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ existuje v tomto bodě také $f_{c\vec{u}}$ a platí $f_{c\vec{u}} = cf_{\vec{u}}$. Abychom určili směrnici přímky dotýkající se v bodě $[x_0, y_0]$ grafu funkce, která leží v rovině kolmé k rovině xy obsahující přímku procházející bodem $[x_0, y_0]$ ve směru daného vektoru $\vec{u}$, musíme brát v úvahu pouze vektor jednotkové délky. Geometrický význam směrové derivace ilustruje obrázek 14.



Obrázek 14: Derivace ve směru – geometrická interpretace

Obdobným způsobem je možné definovat pojem směrové derivace pro funkci tří a více proměnných v bodě $[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*]$, tj. jako limitu tvaru

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^* + hu_1, x_2^* + hu_2, \ldots x_n^* + hu_n) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)}{h} =$$

$$= f_{\vec{u}}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*), \qquad \text{kde} \quad \vec{u} = (u_1, u_2 \ldots, u_n).$$

Nyní se budeme zabývat otázkou výpočtu směrových derivací. Můžeme samozřejmě vyjít přímo z definice.

Příklad 6.3. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = xy^2$ ve směru vektoru $\vec{u} = (2, 3)$ v bodě $[4, -1]$.

Řešení. Dosazením do definice a následným využitím l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$f_{(2,3)}(4, -1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4 + 2h, -1 + 3h) - f(4, -1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2h+4)(3h-1)^2-4}{h} = \lim_{h\to 0} 2(3h-1)^2 + 6(2h+4)(3h-1) = -22.$$

Za předpokladu, že funkce f je diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, můžeme odvodit pro výpočet směrových derivací vztah, který nevyžaduje využití definice. Postačí nám znalost parciálních derivací prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$. Můžeme uvažovat následovně: funkce f je diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, právě když existuje tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$. Směrové derivace jsou směrnicemi jednotlivých tečen, které všechny leží v tečné rovině a procházejí bodem $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$. Mezi těmito tečnami hrají zvláštní úlohu dvě z nich. Jedná se o tečny, jejichž směrnice vystupují jako koeficienty v rovnici tečné roviny, tj. jsou parciálními derivacemi funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Uvědomíme-li si, že libovolný vektor (u_1, u_2) můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů (1,0) a (0,1), můžeme vyslovit následující domněnku: mohla by být výsledná hodnota směrové derivace ve směru vektoru (u_1, u_2) v bodě $[x_0, y_0]$ získána jako vhodná lineární kombinace hodnot parciálních derivací v tomto bodě (tj. směrových derivací ve směrech vektorů (1,0) a (0,1))? Následující věta ukazuje, že tomu tak skutečně je.

Věta 6.4. *Je-li funkce $f(x, y)$ diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě směrovou derivaci ve směru libovolného vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a platí vztah*

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2.$$

Důkaz. Označme

$$g(h) = f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2).$$

Pro funkci g takto vyjádřenou dostáváme

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h} = f_{\vec{u}}(x_0, y_0).$$

Pro funkci g platí

$$g(h) = f(x, y), \qquad \text{kde} \quad x = x_0 + hu_1, y = y_0 + hu_2.$$

Jestliže nyní vypočteme podle pravidla o derivování složené funkce derivaci funkce g, obdržíme

$$g'(h) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}h} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_x u_1 + f_y u_2$$

a pro $h = 0$ dostáváme

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2.$$

Porovnáním výsledků, které jsme obdrželi pro hodnotu derivace funkce g v bodě 0, je tvrzení dokázáno. $\diamond$

Příklad 6.5. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, v bodě $[2, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, 1)$.

Řešení. Podle věty 6.4 stačí vypočítat parciální derivace funkce $f(x, y)$ v daném bodě. Máme tedy

$$f_x = 2x + y, \quad \text{tj. } f_x(2, 1) = 5 \qquad \text{a} \qquad f_y = 2y + x, \quad \text{tj. } f_y(2, 1) = 4.$$

Celkově tedy dostáváme

$$f_{\vec{u}}(2, 1) = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9.$$

Příklad 6.6. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \sin x + \cos y$, v bodě $[\pi/2, 0]$ ve směru jednotkového vektoru daného úhlem $\pi/4$.

Řešení. Nejdříve je zapotřebí si uvědomit, že směrový vektor má souřadnice $\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)$. Jestliže dále vypočteme

$$f_x(\pi/2, 0) = 0 \qquad \text{a} \qquad f_y(\pi/2, 0) = 0,$$

vyplývá odsud, že rovněž hledaná hodnota směrové derivace je nulová.

Povšimněme si nyní znovu zápisu směrové derivace funkce v daném bodě $[x_0, y_0]$. Je dán vztahem, který můžeme vyjádřit jako skalární součin dvou vektorů

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 = (f_x(x_0, y_0, f_y(x_0, y_0)) \cdot (u_1, u_2).$$

První z vektorů, jehož složky jsou parciální derivace funkce f, se v matematice nevyskytuje pouze ve spojitosti se směrovými derivacemi, ale lze se s ním setkat v řadě dalších případů. Jeho častý výskyt vedl k tomu, že tento vektor má své označení i název, s nímž nás seznamuje následující definice.

Definice 6.7. Nechť je funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $[x_0,y_0]$. **Gradientem** funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ nazýváme vektor, jehož souřadnicemi jsou parciální derivace fce f v tomto bodě a značíme jej

$$\nabla f(x_0,y_0) = (f_x(x_0,y_0,f_y(x_0,y_0)).$$

Poznámka 6.8. Symbol ∇, který jsme použili pro označení gradientu, se nazývá Hamiltonův operátor nebo také nabla operátor. V literatuře se kromě toho pro gradient funkce f v bodě $[x_0,y_0]$ často používá označení $\mathrm{grad} f(x_0,y_0)$.

Příklad 6.9. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, v bodě $[2,1]$ ve směru jejího gradientu.

Řešení. Na základě předcházejích výsledků víme, že

$$\nabla f(2,1) = (f_x(2,1), f_y(2,1)) = (5,4).$$

Celkově tedy dostáváme

$$f_{\nabla f(2,1)}(2,1) = 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 41.$$

Věta, kterou nyní zformulujeme, udává jednu ze zajímavých vlastností gradientu. Pokud jde o směrové derivace funkce v bodě $[x_0,y_0]$, poznamenali jsme už, že jejich hodnota ukazuje, jak rychle se mění hodnoty funkce, pohybujeme-li se v definičním oboru funkce v daném směru. V této souvislosti přirozeně vyvstává tato otázka: Ve směru kterého z vektorů se hodnoty funkce mění nejrychleji? Ukazuje se, že tímto vektorem je právě gradient.

Věta 6.10. *Předpokládejme, že funkce f je v bodě $[x_0,y_0]$ diferencovatelná a platí $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$. Pak je hodnota směrové derivace funkce f ve směru vektorů o stejné nenulové délce maximální pro vektor, který má stejný směr jako gradient.*

Důkaz. Na základě vztahu pro směrovou derivaci můžeme psát

$$f_{\vec{u}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(x_0,y_0)\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos\phi,$$

kde ϕ je úhel, který mezi sebou svírají vektory $\nabla f(x_0, y_0)$ a $\vec{u}$. Z uvedeného vyjádření vyplývá, že obdržený výraz je při vektorech stejné nenulové délky maximální v případě, že $\phi = 0$. To neznamená nic jiného, než že gradient a vektor $\vec{u}$ mají stejný směr. $\diamond$

Poznámka 6.11. Pro funkce tří a více proměnných je zavedení pojmu gradient zcela analogické. Za předpokladu diferencovatelnosti funkce f v bodě $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ jím rozumíme vektor tvaru

$$\nabla f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = (f_{x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \dots, f_{x_n}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)).$$

Snadno lze také nahlédnout, že větu 6.10 je možné zformulovat pro funkce n proměnných pouhou záměnou bodu $[x_0, y_0]$ za bod $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ a gradientu $\nabla f(x_0, y_0)$ za $\nabla f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Poznámka 6.12. Předpokládáme-li, že gradient funkce f je různý od nulového vektoru, je hodnota směrové derivace ve směru gradientu je kladná. Gradient tedy udává směr, ve kterém funkce f nejrychleji roste. Z důkazu věty 6.10 je rovněž vidět, že pokud uvažujeme jen vektory o délce 1, je maximální hodnota směrové derivace rovna $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$. Naopak, ve směru vektoru, který má opačný směr jako gradient, je hodnota směrové derivace záporná. Dále pak je minimální mezi všemi vektory stejné nenulové délky, přičemž pro jednotkové vektory je toto minimum rovno $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$.

Skutečnost nejrychlejšího nárůstu funkce f ve směru gradientu si trpce uvědomil snad každý, kdo byl někdy na turistickém pochodu a čekalo jej zdolání prudkého kopce. Jestliže turistická značka na mapě prochází prakticky kolmo vrstevnicemi daného kopce, pak máte jistotu, že jdete ve směru nejprudšího stoupání, tj. ve směru gradientu. Jestli bude čtenáři tato nabytá znalost při zdolávání kopců útěchou, nevíme, ale může být užitečná při plánování trasy.

6.2 Úlohy k samostatnému řešení a kontrolní otázky

Cvičení 6.1. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = (xy+1)^2$ v bodě $[3, 2]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

Cvičení 6.2. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$ v bodě $[2, -2]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, -3)$.

Cvičení 6.3. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \sin x \cos y$ v bodě $[\pi/3, -2\pi/3]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (4, 3)$.

Cvičení 6.4. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$ v bodě $[0, 0]$ ve směru jednotkového vektoru daného úhlem $2\pi/3$.

Cvičení 6.5. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = x \ln y$ v bodě $[5, 1]$ ve směru jednotkového vektoru daného úhlem $-\pi/6$.

Cvičení 6.6. Vypočtěte gradient funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ v bodě $[0, 0]$.

Cvičení 6.7. Vypočtěte gradient funkce $f(x, y) = y \ln(x/y)$ v bodě $[2, 1]$.

Cvičení 6.8. V bodě $[0, 0, 0]$ vypočtěte gradient funkce dané vztahem $f(x, y, z) = \mathrm{e}^x \sin y + \mathrm{e}^y \sin z + \mathrm{e}^z \sin x$.

Cvičení 6.9. Vypočtěte maximální hodnotu směrové derivace funkce dané vztahem $f(x, y) = x^2 - 7xy + 4y^2$ v bodě $[1, -1]$, uvažujeme-li vektory o délce 1.

Cvičení 6.10. Vypočtěte maximální hodnotu směrové derivace funkce dané vztahem $f(x, y) = x^2 - y^2 - \sin y$ v bodě $[1, \pi/2]$, uvažujeme-li vektory o délce 1.

Otázka 6.1. Jak je definovaná směrová derivace funkce n proměnných?

Otázka 6.2. Vysvětlete, jak je možné směrové derivace interpretovat geometricky.

Otázka 6.3. Plyne z existence parciálních derivací v daném bodě ve všech směrech spojitost funkce v tomto bodě?

Otázka 6.4. Definujte pojem gradient funkce pro funkci n proměnných.

Otázka 6.5. Pokuste se vymyslet (popř. vyhledat) nějakou reálnou, např. fyzikální aplikaci, která využívá pojem gradient.

Otázka 6.6. Zdůvodněte, proč pro směrovou derivaci platí známá pravidla pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí (tedy např. $(f+g)_{\vec{u}} = f_{\vec{u}} + g_{\vec{u}}$ atd.). Zformulujte analogii věty 3.6 pro směrové derivace.

Otázka 6.7. Který vektor udává směr, v němž funkce nejrychleji klesá?

Otázka 6.8. Nechť jsou dány lineárně nezávislé vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Uveďte příklad funkce dvou proměnných, která má derivaci ve směru daného vektoru $\vec{u}$, ale nemá derivaci ve směru vektoru $\vec{v}$.

Otázka 6.9. Můžeme využít gradient při výpočtu směrové derivace funkce?

Otázka 6.10. Jaká je hodnota směrové derivace vypočtené ve směru vektoru, který je kolmý ke gradientu?

6.3 Výsledky úloh k samostatnému řešení

Cvičení 6.1. $98/\sqrt{5}$.

Cvičení 6.2. $-1/2$.

Cvičení 6.3. $5/4$.

Cvičení 6.4. $1/2(\sqrt{3} - 1)$.

Cvičení 6.5. $-5/2$.

Cvičení 6.6. $(0, 0)$.

Cvičení 6.7. $(1/2, \ln 2 - 1)$.

Cvičení 6.8. $(1, 1, 1)$.

Cvičení 6.9. $3\sqrt{34}$.

Cvičení 6.10. $\sqrt{4 + \pi^2}$.

6.4 Kontrolní test

Start testu **Směrové derivace**

1. Pro výpočet směrové derivace diferencovatelné funkce $f(x,y,z)$ v bodě $[x_0,y_0,z_0]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ platí vztah

- ☐ $f_{\vec{u}}(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0)u_2 + f_y(x_0,y_0,z_0)u_3 + f_z(x_0,y_0,z_0)u_1$
- ☐ $f_{\vec{u}}(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0)u_1 + f_y(x_0,y_0,z_0)u_2 + f_z(x_0,y_0,z_0)u_3$
- ☐ $f_{\vec{u}}(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0)u_3 + f_y(x_0,y_0,z_0)u_2 + f_z(x_0,y_0,z_0)u_1$

2. Parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle proměnné x je speciálním případem směrové derivace

- ☐ ve směru vektoru $(0,1)$
- ☐ ve směru vektoru $(1,0)$
- ☐ ve směru vektoru $(1,1)$
- ☐ nesouvisí s pojmem směrová derivace

3. Gradient diferencovatelné funkce f v daném bodě je vektor, jehož složkami jsou

- ☐ parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle proměnných x a y v daném bodě
- ☐ směrové derivace ve směru vektorů $(1,0)$ a $(1,1)$ v daném bodě
- ☐ směrové derivace ve směru vektorů $(1,1)$ a $(0,1)$ v daném bodě

4. Gradientem funkce $f(x,y)=x^2y+2xy^2$ v bodě $[-2,1]$ je vektor

- ☐ $(-1,-2)$
- ☐ $(-2,-4)$
- ☐ $(-3,-2)$

5. Hodnota směrové derivace funkce $f(x,y)=x^3-3xy+4y^2$ v bodě $[1,2]$ ve směru vektoru délky 1 daného úhlem $\pi/6$ je

- ☐ $13-\sqrt{3}/2$
- ☐ $(13-3\sqrt{3})/2$
- ☐ $(13-\sqrt{3})/2$

6. Hodnota směrové derivace funkce $f(x,y)=7x^2-3y+4$ ve směru vektoru $(\sqrt{3}/2,1/2)$ v bodě $[1,1]$ je

- ☐ $7\sqrt{3}-3/2$
- ☐ $4\sqrt{3}+1/2$
- ☐ $5\sqrt{3}+3/2$

7. Hodnoty diferencovatelné funkce $f(x, y)$ s nenulovým gradientem nejrychleji klesají ve směru vektoru, který

- ☐ je kolmý ke gradientu funkce v daném bodě
- ☐ má stejný směr jako gradient, ale dvojnásobnou délku
- ☐ svírá s gradientem úhel $\phi = \pi$
- ☐ svírá s gradientem úhel $\phi = \pi/3$

8. Hodnota směrové derivace funkce $f(x, y, z) = x^y + 3yz^2$ ve směru vektoru $(2/3, -4/3, 4/3)$ v bodě $[1, -1, 1]$ je

- ☐ $22/3$
- ☐ $35/3$
- ☐ $-38/3$

9. Vektor o délce 1, v jehož směru funkce $f(x, y) = x^2 - 7xy + 4y^2$ v bodě $[1, -1]$ nejrychleji roste, má souřadnice

- ☐ $(\frac{3\sqrt{34}}{34}, \frac{-5\sqrt{34}}{34})$
- ☐ $(\frac{2\sqrt{27}}{27}, \frac{5\sqrt{27}}{27})$
- ☐ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

10. Je dána funkce $f(x, y) = xe^y$. Minimální hodnota směrové derivace funkce f v bodě $[2, 0]$ mezi všemi vektory o délce 1 je rovna

- ☐ $-\sqrt{5}$
- ☐ $-\sqrt{3}$
- ☐ $-\sqrt{2}$

Konec testu | Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek:

Procento úspěšnosti:

7 Implicitní funkce

Klíčová slova. Funkce, funkce zadaná implicitně, existence implicitní funkce, derivace implicitní funkce.

Doposud jsme se setkávali u funkcí jedné proměnné se zadáním funkce ve tvaru $y = f(x)$ a u funkcí dvou proměnných se zápisem funkce ve formě $z = f(x, y)$. Tento zápis závislosti jedno čísla na jednom čísle, resp. jednoho čísla na dvou číslech nazýváme explicitní a říkáme, že funkce f je zadaná explicitně (přímo).

Uvažujme rovnici $F(x, y) = 0$, kde F je funkce dvou proměnných. Z této rovnice bychom chtěli vypočítat y jako funkci proměnné x, tj. vyjádřit je ve tvaru $y = f(x)$.Tomuto vyjádření funkce f rovnicí $F(x, y) = 0$ říkáme implicitní vyjádření, nebo-li že funkce f je rovnicí $F(x, y) = 0$ zadaná implicitně (nepřímo).

7.1 Implicitně zadaná funkce jedné proměnné

Funkce $F(x, y)$ je funkce dvou proměnných. Označme Ω množinu všech řešení rovnice $F(x, y) = 0$, tj. $\Omega = \{[x, y] \in \mathcal{D}F; F(x, y) = 0\}$. Na následujících příkladech si ukážeme rozmanitost množiny Ω:

1. Pro $F(x, y) = x^4 + x^2 + 1$ je $\Omega = \emptyset$, tj. nenajdeme žádný bod $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, který by splňoval rovnici $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

2. Pro $F(x, y) = 5x^2 + y^2$ je $\Omega = \{[0, 0]\}$. Množina všech bodů $[x, y]$, které vyhovují rovnici $5x^2 + y^2 = 0$, se tedy skládá z jediného bodu $[0, 0]$.

3. Pro $F(x, y) = 3x - y + 4$ je $\Omega = \{[x, 3x + 4]; x \in \mathbb{R}\}$. Množinu Ω tedy tvoří přímka o rovnici $y = 3x + 4$. Libovolnému číslu $x \in (-\infty, \infty)$ je přiřazeno právě jedno číslo y.

4. Pro $F(x, y) = \sqrt{x^2y^2} - xy$ je $\Omega = \{[x, y]; x, y \geq 0 \vee x, y \leq 0\}$, tj. množina všech bodů $[x, y]$, které vyhovují rovnici $\sqrt{x^2y^2} - xy = 0$, vyplňuje celý první a třetí kvadrant, včetně souřadnicových os.

5. Pro $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ je množina Ω jednotková kružnice se středem v počátku. Rovnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ popisuje křivku, kterou si však nelze představit jako graf funkce $y = f(x)$. Z rovnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ je možné vypočíst $y = \sqrt{1 - x^2}$ nebo $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, což jsou horní resp. dolní půlkružnice, a to už jsou grafy funkce. Tedy množina Ω není grafem žádné funkce jedné proměnné. Nicméně v okolí některých

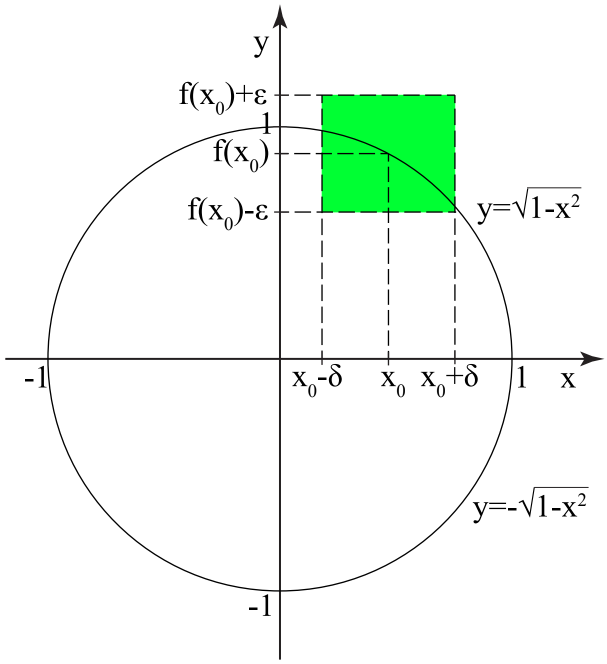
konkrétních bodů $P = [x_0, y_0] \in \Omega$ ji však již za graf funkce považovat lze. Tyto úvahy vedou k zavedení pojmu funkce dané implicitně.

Definice 7.1. Nechť F je funkce dvou proměnných, Ω množina všech řešení rovnice $F(x, y) = 0$ a nechť $[x_0, y_0] \in \Omega$ je bod. Jestliže existuje okolí $\mathcal{O} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ bodu $[x_0, y_0]$ takové, že množina $\Omega \cap \mathcal{O}$ je totožná s grafem funkce $y = f(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, řekneme, že funkce f je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ definována **implicitně** rovnicí $F(x, y) = 0$.

Jinými slovy můžeme říci, že funkce $y = f(x)$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ zadána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $F(x, f(x)) = 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Vraťme se nyní k příkladu s jednotkovou kružnicí, viz obrázek 15. K rovnici $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ hledáme funkci $y = f(x)$ takovou, že $F(x, f(x)) = 0$. Vyjádřením y z rovnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ dostáváme $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$. Rovnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ zadává implicitně dvě funkce, funkci $y = \sqrt{1 - x^2}$ pro body ležící na horní půlkružnici a $y = -\sqrt{1 - x^2}$ pro body ležící na dolní půlkružnici. V okolí krajního bodu $[1, 0]$ nebudou řešení rovnice tvořit graf funkce proměnné x, protože nenajdeme okolí tohoto bodu tak, aby neobsahovalo jak horní, tak dolní část kružnice, tudíž na tomto okolí nemůže existovat funkce daná implicitně. Obdobná situace je v bodě $[-1, 0]$.

V uvedených příkladech jsme věděli, jak vypadá množina řešení Ω, i když nebyla grafem funkce jedné proměnné, nebo jsme byli schopni vyjádřit y v závislosti na x. Otázkou je, jak získat informace o funkci y v případě, že ji nedokážeme z rovnice $F(x, y) = 0$ přímo vyjádřit. Proto si uvedeme následující větu, která pojednává o existenci jediné implicitně zadané funkce a její derivaci.



Obrázek 15: Jednotková kružnice

Věta 7.2. *Nechť $F(x,y)$ je funkce dvou proměnných a má tyto tři vlastnosti:*

- *má na okolí $\mathcal{O} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu,*
- *v bodě $[x_0, y_0]$ je $F(x_0, y_0) = 0$,*
- *parciální derivace $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.*

Pak je rovnicí $F(x,y) = 0$ v okolí $\mathcal{O}([x_0, y_0])$ bodu $[x_0, y_0]$ implicitně definována právě jedna funkce $y = f(x)$ taková, že

- *má graf procházející bodem $[x_0, y_0]$, tj. $y_0 = f(x_0)$,*
- *$F(x, f(x)) = 0$,*
- *je spojitá v okolí bodu x_0, tj. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,*
- *má spojitou první derivaci, pro niž platí*

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \quad \text{pro } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{7.1}$$

Poznámka 7.3.

1) Pro existenci implicitně zadané funkce je podmínka $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ pouze postačující. Například pro rovnici $F(x,y) = y^3 - x = 0$ je $F_y(0,0) = 0$. I přesto v okolí počátku existuje jediná implicitně zadaná funkce $y = \sqrt[3]{x}$ určená rovnicí $y^3 - x = 0$.

2) Vzorec $y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ můžeme také psát ve tvaru $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ nebo $f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

3) Je-li funkce $y = f(x)$ dána rovnicí $F(x,y) = 0$ a funkce $F(x,y)$ je jedenkrát spojitě diferencovatelná, můžeme použít pravidla pro derivovaní složené funkce a dostaneme

$$F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + F_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

pro $F_y \neq 0$. Tímto způsobem můžeme odvodit i vyšší derivace funkce $y = f(x)$ dané implicitně, což formuluje následující věta.

Věta 7.4. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 7.2 a funkce F má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace do řádu k, $k \in \mathbb{N}$. Pak implicitně daná funkce $y = f(x)$ má spojité derivace do řádu k. Jejich vzorce dostaneme opakovaným derivováním vztahu (7.1).*

4) Bez ztráty na obecnosti uvažujeme rovnici $F(x,y) = 0$, jelikož obecnou rovnici $G(x,y) = H(x,y)$ lze vždy upravit a všechny její členy převést na levou stranu, tedy $G(x,y) - H(x,y) = 0$. Pak stačí položit $F = G - H$.

Příklad 7.5. K rovnici $\sin xy - x + y = 0$ najděte bod, v němž jsou splněny předpoklady věty 7.2 o existenci implicitně dané funkce $y = f(x)$. V tomto bodě spočítejte první derivaci implicitně dané funkce $y = f(x)$.

Řešení. V tomto případě nevíme, jak vypadá množina řešení a ani nelze z rovnice přímo vyjádřit y. Rovnice je však splněna pro bod $[0,0]$. Zjistíme, zda v jeho okolí zadává tato rovnice implicitně funkci $y = f(x)$. Podle věty 7.2 zbývá ověřit, zda funkce $F(x,y) = \sin xy - x + y = 0$ splňuje podmínku $F_y(0,0) \neq 0$. Spočteme derivaci funkce $F(x,y)$ podle proměnné

y. Připomeňme si, že v tomto případě při derivování vystupuje proměnná x jako konstanta. $F_y(x,y) = x\cos xy + 1$, dosadíme bod $[0,0]$, $F_y(0,0) = 1 \neq 0$. Spočteme ještě $F_x(x,y) = y\cos xy - 1$ dosadíme bod $[0,0]$, $F_x(0,0) = -1$. Protože funkce F je jedenkrát spojitě diferencovatelná, je také $f(x)$ diferencovatelná a platí

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(y,x)} = -\frac{y\cos xy - 1}{x\cos xy + 1} \quad \Rightarrow \quad y'(0) = -\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Funkce $f(x)$ zadaná implicitně rovnicí $\sin xy - x + y = 0$ má v nule derivaci rovnu 1.

Příklad 7.6. Ověřte, že rovnice $5x^3 + y^3 - 6xy = 0$ zadává v bodě $[1,1]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$, a najděte rovnice tečny a normály ke grafu této funkce v bodě $[1,1]$.

Řešení. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2 pro funkci $F(x,y) = 5x^3 + y^3 - 6x$ a pro $[x_0, y_0] = [1,1]$. Funkce F má spojité parciální derivace v $\mathbb{R}^2$. Platí $F(1,1) = 5 + 1 - 6 = 0$ a

$$F_y(x,y) = 3y^2 - 6x \quad \Rightarrow \quad F_y(1,1) = -3 \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.2 jsou splněny, takže rovnicí $5x^3+y^3-6xy = 0$ je v jistém okolí bodu $[1,1]$ určena implicitně funkce $y = f(x)$ taková, že $f(1) = 1$. Hledáme tečnu k implicitně dané funkci. Budeme vycházet z rovnice tečny t ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, y_0 = f(x_0)]$, tj. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Dosadíme do rovnice za f' vzorec (7.1) a dostáváme

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x - x_0).$$

Parciální derivaci F_y již spočtenou máme, dopočteme parciální derivaci F_x

$$F_x(x,y) = 15x^2 - 6y \quad \Rightarrow \quad F_x(1,1) = 9.$$

Derivace f' v bodě $x = 1$ je

$$f'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = -\frac{9}{-3} = 3.$$

Rovnice tečny t je

$$y - 1 = 3(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y - 3x + 2 = 0.$$

Normála n je přímka kolmá k tečně. Využijeme faktu, že směrový vektor tečny je stejný jako normálový vektor normály nebo toho, že součin směrnic dvou navzájem kolmých přímek je roven -1. Rovnice normály n je

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y+\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=0.$$

Příklad 7.7. Ověřte, že rovnice $3x^3y^2+\cos y=0$ zadává v bodě $[0,\frac{\pi}{2}]$ implicitně jedinou funkci $y=f(x)$, a určete její první derivaci.

Řešení. Označme $F(x,y)=3x^3y^2+\cos y$, $[x_0,y_0]=[0,\frac{\pi}{2}]$. Funkce F má spojité parciální derivace. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2. Platí $F(0,\frac{\pi}{2})=0+\cos\frac{\pi}{2}=0$ a

$$F_y(x,y)=6x^3y-\sin y \quad \Rightarrow \quad F_y\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=-1\neq 0.$$

Předpoklady věty 7.2 jsou splněny, takže rovnicí $3x^3y^2+\cos y=0$ je v okolí bodu $[0,\frac{\pi}{2}]$ určena implicitně funkce $y=f(x)$ pro niž platí, že $f(0)=\frac{\pi}{2}$. Derivováním $F(x,y)$ podle x dostáváme

$$F_x(x,y)=9x^2y^2 \quad \Rightarrow \quad F_x\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Dosazením do vzorce (7.1) dostáváme

$$y'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{9x^2y^2}{6x^3y-\sin y} \quad \Rightarrow \quad y'(0)=-\frac{F_x(0,\frac{\pi}{2})}{F_y(0,\frac{\pi}{2})}=0.$$

Příklad lze také spočíst podle poznámky 7.3 s využitím derivací složené funkce, tj. $F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$. Tedy bereme y za funkci proměnné x a rovnici derivujeme podle x. Pro naši konkrétní funkci dostáváme

$$9x^2y^2+6x^3yy'-x\sin yy'=0,$$

odtud vyjádříme y',

$$y'=-\frac{9x^2y^2}{6x^3y-\sin y}$$

pro $6x^3y\neq x\sin y$ a $y'(0)=0$.

Příklad 7.8. Ověřte, že rovnice $x^2+y=3xy$ zadává v okolí bodu $[-1,-\frac{1}{4}]$ implicitně jedinou funkci $y=f(x)$. Najděte její první a druhou derivaci.

Řešení. Označme $F(x,y) = x^2 + y - 3xy$, $[x_0, y_0] = [-1, -\frac{1}{4}]$. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2. Funkce F má spojité parciální derivace v $\mathbb{R}^2$. Jelikož $F(-1, -\frac{1}{4}) = (-1)^2 - \frac{1}{4} - 3(-\frac{1}{4}) = 0$ a

$$F_y(x,y) = 1 - 3x \quad \Rightarrow \quad F_y\left(-1, -\frac{1}{4}\right) = 4 \neq 0,$$

jsou předpoklady věty 7.2 splněny. Rovnicí $x^2 + y - 3xy = 0$ je v okolí bodu $[-1, -\frac{1}{4}]$ určena implicitně funkce $y = f(x)$ mající derivace všech řádů, pro niž platí, že $f(-1) = -\frac{1}{4}$. Protože

$$F_x(x,y) = 2x - 3y \quad \Rightarrow \quad F_x\left(-1, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4},$$

je podle (7.1)

$$y'(x) = f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{2x-3y}{1-3x} \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = -\frac{-\frac{5}{4}}{4} = \frac{5}{16}.$$

Druhou derivaci $y''(x)$ spočteme podle věty 7.4 derivováním první derivace a dostaneme

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = \left(-\frac{2x-3y}{1-3x}\right)' = -\frac{(2-3y')(1-3x) - (2x-3y)(-3)}{(1-3x)^2} = \\ &= -\frac{(2-3(-\frac{2x-3y}{1-3x}))(1-3x) - (2x-3y)(-3)}{(1-3x)^2} = -\frac{2-18y+6x}{(1-3x)^2}. \end{aligned}$$

Hodnota druhé derivace $y''(x)$ v bodě -1 je

$$y''(-1) = f''(-1) = -\frac{2 - 18\cdot(-\frac{1}{4}) + 6\cdot(-1)}{(1-3\cdot(-1))^2} = -\frac{1}{32}.$$

Jelikož jsme spočetli první i druhou derivaci, můžeme funkci $y = f(x)$ nahradit Taylorovým polynomem druhého řádu se středem v bodě $x_0 = -1$. Taylorův polynom $T_2(x)$ má tvar

$$T_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{1}{2}f''(-1)(x+1)^2,$$

tudíž

$$T_2(x) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{16}(x+1) - \frac{1}{64}(x+1)^2.$$

Příklad 7.9. Ověřte, že rovnice $\mathrm{e}^{xy} - x^2 + y^3 = 0$ zadává v okolí bodu $[0, -1]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$. Najděte Maclaurinův polynom druhého řádu této funkce.

Řešení. Označme $F(x,y) = \mathrm{e}^{xy} - x^2 + y^3$, $[x_0, y_0] = [0, -1]$. Funkce F má spojité parciální derivace v $\mathbb{R}^2$. Při výpočtu budeme vycházet z věty 7.2. Nejdříve ověříme, že $F(0,-1) = 0$. Skutečně $\mathrm{e}^{0\cdot(-1)} - 0 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$. Dále $F_y(0,-1) \neq 0$, tj.

$$F_y(0,-1) = (x\mathrm{e}^{xy} + 3y^2)|_{[0,-1]} = 3 \neq 0.$$

Podle věty 7.2 je rovnicí $\mathrm{e}^{xy} - x^2 + y^3 = 0$ v okolí bodu $[0,-1]$ implicitně dána funkce $y = f(x)$ mající derivace všech řádů a platí pro ni $f(0) = -1$.
První derivaci y' si spočteme dvěma způsoby:
1. Při určování y' dosadíme do vzorce (7.1)

$$y'(0) = f'(0) = -\frac{y\mathrm{e}^{xy} - 2x}{x\mathrm{e}^{xy} + 3y^2}\bigg|_{[0,-1]} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. Hledáme y' pomocí derivace složené funkce, tj. v rovnici $\mathrm{e}^{xy} - x^2 + y^3 = 0$ bereme y za funkci proměnné x a rovnici derivujeme podle x. Pak dostáváme

$$y\mathrm{e}^{xy} + xy'\mathrm{e}^{xy} - 2x + 3y^2y' = 0.$$

Z této rovnice vyjádříme y',

$$y' = \frac{2x - y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy} + 3y^2},$$

dosadíme bod $[0,-1]$ a dostáváme

$$y'(0) = \frac{1}{3}.$$

K získání druhé derivace implicitně dané funkce y'' derivujeme zadanou rovnici $\mathrm{e}^{xy} - x^2 + y^3 = 0$ dvakrát podle x (neustále předpokládáme závislost y na x) a vyjádříme y''. Rovnici $F(x,y,z) = 0$ jsme již jednou podle x derivovali, stačí tedy přidat ještě jednu derivaci podle x,

$$(y\mathrm{e}^{xy} + xy'\mathrm{e}^{xy} - 2x + 3y^2y')' = 0',$$

$$2y'\mathrm{e}^{xy} + y^2\mathrm{e}^{xy} + 2xyy'\mathrm{e}^{xy} + xy''\mathrm{e}^{xy} + (xy')^2\mathrm{e}^{xy} - 2 + 6y(y')^2 + 3y^2y'' = 0.$$

Odtud vyjádříme y''

$$y'' = -\frac{2y'\mathrm{e}^{xy} + y^2\mathrm{e}^{xy} + 2xyy'\mathrm{e}^{xy} + (xy')^2\mathrm{e}^{xy} - 2 + 6y(y')^2}{x\mathrm{e}^{xy} + 3y^2},$$

$$y''(0) = f''(0) = -\frac{2\cdot\frac{1}{3} + (-1)^2 - 2 + 6\cdot(-1)\cdot(\frac{1}{3})^2}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}.$$

Maclaurinův polynom druhého řádu $T_2(x)$ má tvar

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2,$$

tudíž

$$T_2(x) = -1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2.$$

Poznámka 7.10. Jelikož druhá derivace je kladná, dá se usoudit, že $f(x)$ je konvexní na okolí nuly.

Příklad 7.11. K rovnici $x^2 - y^2 = -1$ najděte body, v nichž jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci 7.2 a které jsou stacionárními body takto implicitně definovaných funkcí jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.

Řešení. Označme $F(x, y) = x^2 - y^2 + 1$. Hledáme body, které vyhovují rovnici $F(x_0, y_0) = 0$ takové, že $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Potom z věty 7.2 vyplývá, že v okolí každého takového bodu je rovnicí $F(x, y) = 0$ určena jediná implicitní funkce $y = f(x)$. Dále požadujeme, aby x_0 byl stacionárním bodem této funkce, tedy aby

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x(x_0, y_0) = 0.$$

Hledané body získáme vyřešením soustavy rovnic $F(x, y) = 0$ a $F_x(x, y) = 0$. V našem případě tedy

$$F(x, y) = x^2 - y^2 + 1 = 0 \quad \text{a} \quad F_x(x, y) = 2x = 0.$$

Z druhé rovnice máme $x = 0$. Dosazením $x = 0$ do první rovnice dostaneme $y = \pm 1$. Dostali jsme dva body $A = [0, 1]$, $B = [0, -1]$. Nyní musíme ověřit, zda v těchto bodech platí $F_y(x, y) \neq 0$. Spočteme $F_y(x, y) = 2y$ a dosadíme body A, B, tj.

$$F_y(A) = 2 \neq 0, \quad F_y(B) = -2 \neq 0.$$

Jak v okolí bodu A, tak v okolí bodu B je rovnicí $F(x, y) = 0$ určena implicitně funkce jedné proměnné $f_1(x)$, resp. $f_2(x)$.
K určení extrémů potřebujeme druhé derivace, které spočteme pomocí věty 7.4, tj.

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x(-\frac{x}{y})}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

Postupně dosadíme stacionární body A, B:

$$f_1''(0) = -\frac{1+0}{1} = -1 < 0 \Rightarrow \text{maximum},$$

$$f_2''(0) = -\frac{1+0}{-1} = 1 > 0 \Rightarrow \text{minimum}.$$

Funkce $f_1(x)$ má v bodě 0 lokální maximum a funkce $f_2(x)$ má v bodě 0 lokální minimum.

7.2 Implicitně zadaná funkce dvou proměnných

Pro funkci $F(x, y, z)$ tří proměnných budeme postupovat obdobně jako pro funkci dvou proměnných v předchozí kapitole. Ω je množina všech řešení rovnice $F(x, y, z) = 0$, tj. $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathcal{D}F; F(x, y, z) = 0\}$.

Definice 7.12. O funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ řekneme, že je v okolí bodu $[x_0, y_0 y_0] \in \Omega$ **implicitně** zadána rovnicí $F(x, y, z) = 0$, jestliže je množina Ω v okolí bodu $[x_0, y_0 y_0]$ totožná s grafem funkce $z = f(x, y)$, tj. v okolí bodu $[x_0, y_0 y_0]$ platí $F(x, y, f(x, y)) = 0$ a $f(x_0, y_0) = z_0$.

Množina všech řešení rovnice $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (kulová plocha) není grafem funkce dvou proměnných. Nicméně v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$, který je řešením dané rovnice, lze množinu řešení považovat za graf funkce dvou proměnných. Uvedeme si větu, která udává postačující podmínky pro existenci právě jedné implicitně zadané funkce dvou proměnných.

Věta 7.13. *Nechť $F(x,y,z)$ je funkce tří proměnných a má tyto tři vlastnosti:*

- *má na okolí $\mathcal{O} = (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1) \times (y_0-\delta_2, y_0+\delta_2) \times (z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\varepsilon > 0$, bodu $[x_0, y_0, z_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu,*
- *v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ je $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,*
- *parciální derivace $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.*

Pak je rovnicí $F(x,y) = 0$ v okolí $\mathcal{O}([x_0, y_0, z_0])$ bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně definována právě jedna funkce $z = f(x,y)$, kde

$$f : (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1) \times (y_0-\delta_2, y_0+\delta_2 \to (z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon),$$

taková, že

- *identicky vyhovuje rovnici $F(x,y,z) = 0$, takže $F(x,y,f(x,y)) = 0$,*
- *prochází bodem $[x_0, y_0]$, takže $z_0 = f(x_0, y_0)$,*
- *je spojitá na okolí bodu $[x_0, y_0]$ a má spojité první parciální derivace*

$$f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{7.2}$$

Následující věta pojednává o existenci a výpočtu vyšších derivací funkce dvou proměnných dané implicitně.

Věta 7.14. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 7.13 a funkce F má v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ spojité parciální derivace do řádu k, $k \in \mathbb{N}$. Pak implicitně daná funkce $z = f(x,y)$ má spojité derivace do řádu k. Jejich vzorce dostaneme opakovaným derivováním vztahu (7.2).*

Příklad 7.15. Ověřte, že rovnice $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 7 = 0$ zadává v okolí bodu $[0, 1, -2]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x,y)$ Vypočtěte její parciální derivace prvního řádu a určete jejich hodnotu v bodě $[0, 1, -2]$.

Řešení. Označme $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 7$, $[x_0, y_0, z_0] = [0, 1, -2]$.

Ověříme předpoklady věty 7.13. Platí

$$F(0,1,-2) = 0 + 1 + (-2)^3 + 0 + 7 = 1 - 8 + 7 = 0.$$

Dále

$$F_z(x,y,z) = 3z^2 + 6xy \quad \Rightarrow \quad F_z(0,1,-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 12 \neq 0.$$

Rovnicí $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 7 = 0$ je v okolí bodu $[0,1,-2]$ implicitně zadána spojitá funkce $f(x,y)$ taková, že $f(0,1) = -2$. Parciální derivace z_x, z_y vypočteme ze vzorce (7.2), tj.

$$z_x(0,1) = f_x(0,1) = -\frac{F_x}{F_z}\Big|_{[0,1,-2]} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy}\Big|_{[0,1,-2]} = -\frac{-12}{12} = 1.$$

$$z_y(0,1) = f_y(0,1) = -\frac{F_y}{F_z}\Big|_{[0,1,-2]} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy}\Big|_{[0,1,-2]} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}.$$

Totéž můžeme získat i jiným způsobem. Hledáme z_x, z_y pomocí derivace složené funkce. Nejdříve spočteme derivaci z_x, tzn. v rovnici $F(x,y,z) = 0$ budeme uvažovat y jako konstantu a z bude funkcí x, y. Rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme derivaci z_x. Tentýž postup platí i pro určení derivace z_y jen s tím rozdílem, že v rovnici $F(x,y,z) = 0$ budeme uvažovat proměnnou x jako konstantu a rovnici derivujeme podle y.

$$(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1)_x = 0_x \ \Rightarrow 3x^2 + 3z^2 z_x + 6yz + 6xyz_x = 0.$$

Odtud vyjádříme z_x a dosadíme bod $[0,1]$,

$$z_x(0,1) = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy}\Big|_{[0,1,-2]} = -\frac{-12}{12} = 1.$$

Analogicky spočteme derivaci z podle y v bodě $[0,1]$.

$$(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1 = 0)_y \ \Rightarrow 3y^2 + 3z^2 z_y + 6xz + 6xyz_y = 0.$$

Odtud vyjádříme z_y a dosadíme bod $[0,1]$,

$$z_y(0,1) = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy}\Big|_{[0,1,-2]} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}.$$

Příklad 7.16. Ověřte, že rovnice $x^2 + y^2 - 3xz + x + y - z = 0$ zadává v okolí bodu $[1,1,1]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x,y)$, a najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v tomto bodě.

Řešení. Pro funkci $F(x,y,z) = x^2+y^2-3xz+x+y-z$ a $[x_0,y_0,z_0] = [1,1,1]$ ověříme předpoklady věty 7.13. Platí $F(1,1,1) = 1+1-3+1+1-1 = 0$. Dále

$$F_z(x,y,z) = 3x - 1 \quad \Rightarrow \quad F_z(1,1,1) = 3 - 1 = 2 \neq 0.$$

Rovnicí $x^2 + y^2 - 3xz + x + y - z = 0$ je v okolí bodu $[1,1,1]$ implicitně zadána právě jedna funkce $f(x,y)$ taková, že $f(1,1) = 1$. Rovnice tečné roviny k funkci $z = f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ má tvar

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Určíme parciální derivace funkce $z = f(x,y)$, která je zadána implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 0$. Derivováním $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 3xz + x + y - z$ podle x, y a podle z dostáváme ze vztahu (7.2)

$$z_x = f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x - 3z + 1}{-3x - 1}, \quad z_y = f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y + 1}{-3x - 1}.$$

Hodnoty parciálních derivací v bodě $[1,1]$ tedy jsou

$$z_x(1,1) = f_x(1,1) = -\frac{2x - 3z + 1}{-3x - 1}\bigg|_{[1,1,1]} = 0,$$

$$z_y(1,1) = f_y(1,1) = -\frac{2y + 1}{-3x - 1}\bigg|_{[1,1,1]} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}.$$

Vypočtené hodnoty derivací v bodě $[1,1]$ dosadíme do vzorce pro tečnou rovinu a získáváme

$$z - 1 = 0(x - 1) + \frac{3}{4}(y - 1),$$

po úpravě

$$3y - 4z = 0.$$

Příklad 7.17. Ověřte, že rovnice $x + y^2 + z^3 + z - 4 = 0$ zadává v okolí bodu $[1,1,1]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x,y)$, a vypočítejte první a druhé parciální derivace této funkce f v daném bodě.

Řešení. Označme $F(x,y,z) = x + y^2 + z^3 + z - 4$, $[x_0,y_0,z_0] = [1,1,1]$. Ověříme předpoklady věty 7.13. Je $F(1,1,1) = 1+1^2+1^3+1-4 = 4-4 = 0$. Dále

$$F_z(x,y,z) = 3z^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad F_z(1,1,1) = 3 + 1 = 4 \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.13 jsou splněny a rovnicí $x + y^2 + z^3 + z - 4 = 0$ je v okolí bodu $[1,1,1]$ implicitně zadána právě jedna funkce $f(x,y)$ taková, že $f(1,1) = 1$. Protože funkce F má spojité parciální derivace libovolného řádu, platí totéž podle věty 7.14 i pro funkci f. Nejdříve budeme počítat parciální derivace prvního řádu, tzn. z_x, z_y. Můžeme počítat buď přímým dosazením do vzorce (7.2) nebo derivováním rovnice $F(x,y,z) = 0$. Ukážeme si druhou zmíněnou možnost. V rovnici $F(x,y,z) = 0$ nejprve prohlásíme y za konstantu, z bude funkcí x, y. Rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme derivaci z_x. Tentýž postup platí i pro určení derivace z_y jen s tím rozdílem, že v zadané rovnici $F(x,y,z) = 0$ prohlásíme za konstantu proměnnou x a rovnici derivujeme podle y.

$$(x + y^2 + z^3 + z - 4)_x = 0_x \quad \Rightarrow 1 + 3z^2 z_x + z_x = 0.$$

Odtud vyjádříme z_x a dosadíme bod $[1,1]$,

$$z_x(1,1) = f_x(1,1) = -\frac{1}{3z^2+1}\Big|_{[1,1,1]} = -\frac{1}{4}.$$

Analogicky spočteme derivaci z_y v bodě $[1,1]$.

$$(x + y^2 + z^3 + z - 4)_y = 0_y \quad \Rightarrow 2y + 3z^2 z_y + z_y = 0.$$

Odtud vyjádříme z_y a dosadíme bod $[1,1]$,

$$z_y(1,1) = f_y(1,1) = -\frac{2y}{3z^2+1}\Big|_{[1,1,1]} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

K získání druhých parciálních implicitně dané funkce z musíme zadanou rovnici $F(x,y,z) = 0$ derivovat dvakrát podle x a vyjádřit derivaci z_{xx}, derivovat dvakrát podle y a vyjádřit derivaci z_{yy}, derivovat jednou podle x a jednou podle y a vyjádřit derivaci z_{xy}. K výpočtu druhých parciálních derivací využijeme již vypočtených prvních parciálních derivací. Rovnici jsme již jednou podle x derivovali a teď ji zderivujeme podle x ještě jednou,

$$(1 + 3z^2 z_x + z_x)_x = 0_x \Rightarrow 6z(z_x)^2 + 3z^2 z_{xx} + z_{xx} = 0.$$

Odtud vyjádříme z_{xx} a dosadíme bod $[1,1]$,

$$z_{xx}(1,1) = f_{xx}(1,1) = -\frac{6z(z_x)^2}{3z^2+1}\Big|_{[1,1,1]} = -\frac{6\cdot(-\frac{1}{4})^2}{4} = -\frac{\frac{3}{8}}{4} = -\frac{3}{32}.$$

Zadanou rovnici již jednou derivovanou podle x teď budeme derivovat podle y,

$$(1 + 3z^2 z_x + z_x)_y = 0_y \Rightarrow 6z z_y z_x + 3z^2 z_{xy} + z_{xy} = 0.$$

Odtud vyjádříme z_{xy} a dosadíme bod $[1,1]$,

$$z_{xy}(1,1) = f_{xy}(1,1) = -\frac{6zz_yz_x}{3z^2+1}\Big|_{[1,1,1]} = -\frac{6\cdot(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{4})}{4} = -\frac{\frac{3}{4}}{4} = -\frac{3}{16}.$$

Rovnici $F(x,y,z)=0$ již jednou derivovanou podle y teď budeme derivovat ještě jednou podle y,

$$(2y+3z^2z_y+z_y)_y = 0_y \Rightarrow 2+6z(z_y)^2+3z^2z_{yy}+z_{yy}=0.$$

Odtud vyjádříme z_{yy} a dosadíme bod $[1,1]$,

$$z_{yy}(1,1) = f_{yy}(1,1) = -\frac{2+6z(z_y)^2}{3z^2+1}\Big|_{[1,1,1]} = -\frac{2+6(-\frac{1}{2})^2}{4} = -\frac{\frac{7}{2}}{2} = -\frac{7}{8}.$$

Jelikož jsme spočetli první i druhé parciální derivace, můžeme funkci $z = f(x,y)$ nahradit Taylorovým polynomem druhého řádu se středem v bodě $[x_0,y_0]=[1,1]$. Taylorův polynom $T_2(x,y)$ má tvar

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(1,1)+f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)+ \\ + &\ \frac{1}{2}[f_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f_{yy}(1,1)(y-1)^2], \end{aligned}$$

tudíž

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= 1-\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)+ \\ &+ \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{32}(x-1)^2-\frac{3}{8}(x-1)(y-1)-\frac{7}{8}(y-1)^2\right]. \end{aligned}$$

7.3 Krokovaný příklad

Příklad. Zjistěte, zda rovnice $x - 2y + z^2 - \ln z = 0$ zadává implicitně funkci $z = f(x, y)$ v okolí bodu $[-1, 0, 1]$. V kladném případě určete její gradient.
Řešení.
Označme $F(x, y, z) = x - 2y + z^2 - \ln z$. Funkce F má ve svém definičním oboru spojité parciální derivace.
Ověříme předpoklady věty o existenci a derivaci implicitní funkce, tj.

$$F(-1, 0, 1) = \boxed{\quad ?}\,,$$

$$F_z(-1, 0, 1) = \boxed{\qquad ?}\Big|_{[-1,0,1]} = \boxed{\qquad ?} \neq \boxed{\qquad ?}.$$

Předpoklady věty jsou splněny, tudíž rovnice zadává v okolí bodu $[-1, 0, 1]$ implicitně funkci $z = f(x, y)$ takovou, že $f(-1, 0) = 1$.

Spočteme tedy gradient funkce z,

$$\operatorname{grad} z = (z_x, z_y) = \left(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z}\right) = \left(\boxed{\qquad ?}, \boxed{\qquad ?}\right).$$

V bodě $[-1, 0]$ pak dostaneme

$$\operatorname{grad} z(-1, 0) = \left(\boxed{\quad ?}, \boxed{\quad ?}\right).$$

7.4 Úlohy k samostatnému řešení a kontrolní otázky

Cvičení 7.1. Ověřte, že rovnice $x^y - y^x = 0$, kde $x > 0$, $y > 0$, zadává v okolí bodu $[1, 1]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$, a vypočítejte první derivaci této funkce f a určete její hodnotu v daném bodě.

Cvičení 7.2. Ověřte, že rovnice $x^2+2xy+y^3 = 0$ zadává v okolí bodu $[-1, 1]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$, a vypočítejte první a druhou derivaci této funkce f určete její hodnotu v daném bodě.

Cvičení 7.3. Ověřte, že rovnice $\mathrm{e}^{xy}+\sin y+y^2 = 1+\pi^2$ zadává v okolí bodu $[0, \pi]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$. Vypočítejte první a druhou derivace této funkce f v daném bodě. Najděte Maclaurinův polynom druhého řádu této funkce.

Cvičení 7.4. Ověřte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y - x = 0$ zadává v okolí bodu $[0, 0]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$, a napište rovnice tečny a normály ke grafu této funkce v daném bodě.

Cvičení 7.5. K rovnici $-x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$ najděte body, v nichž jsou splněny všechny předpoklady věty o implicitní funkci a které jsou stacionárními body takto implicitně definované funkce jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.

Cvičení 7.6. Ověřte, že rovnice $z+\mathrm{e}^z-xy = 3$ zadává v okolí bodu $[-2, 1, 0]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x, y)$, a vypočítejte první parciální derivace této funkce f v daném bodě.

Cvičení 7.7. Ověřte, že rovnice $\sin xy + \cos zx + \sin zy - \frac{1}{2} = 0$ zadává v okolí bodu $[\frac{2}{3}, 0, \frac{\pi}{2}]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x, y)$, a vypočítejte první parciální derivace této funkce z v daném bodě.

Cvičení 7.8. Ověřte, že rovnice $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}$ zadává v okolí bodu $[0, 1, 1]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x, y)$, a vypočítejte první a druhé parciální derivace této funkce z v daném bodě.

Cvičení 7.9. Ověřte, že rovnice $x^2+y^2+z^2-3xyz = 0$ zadává v okolí bodu $[1, 1, 1]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x, y)$, a určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v daném bodě.

Cvičení 7.10. Ověřte, že rovnice $z + z^3 - x\mathrm{e}^{3x+2y} = 0$ zadává v okolí bodu $[-2, 3, ?]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x, y)$. Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v daném bodě.

Otázka 7.1. Co je to implicitně zadaná funkce?

Otázka 7.2. Jaká je postačující podmínka pro existenci funkce jedné proměnné dané implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$?

Otázka 7.3. Jak se derivuje funkce jedné proměnné daná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$?

Otázka 7.4. Jaká je postačující podmínka pro existenci funkce dvou proměnných dané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$?

Otázka 7.5. Jak spočteme derivaci funkce dvou proměnných dané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$?

Otázka 7.6. Jak spočteme vyšší derivace funkce dané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$?

Otázka 7.7. Jak se hledá tečna k implicitní funkci?

Otázka 7.8. Jak se hledá normála k implicitní funkci?

Otázka 7.9. Jaká je spojistost mezi derivací implicitní funkce a derivací funkce složené?

Otázka 7.10. Jak se hledají lokální extrémy k implicitní funkci?

7.5 Výsledky úloh k samostatnému řešení

Cvičení 7.1. $y' = \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}}$, $y'(1) = 1$

Cvičení 7.2. $y' = -\frac{2(x+y)}{2x-3y^2}$, $y'(-1) = 0$, $y'' = -\frac{2+4y'+6y(y')^2}{2x+3y^2}$, $y''(-1) = -2$

Cvičení 7.3. $y'(0) = -\frac{\pi}{2\pi-1}$, $y''(0) = -\frac{4(2\pi-1)+\pi^2}{(2\pi-1)^3}$, $T_2(x) = \pi - \frac{\pi}{2\pi-1}x - \frac{2(2\pi-1)+\pi^2}{(2\pi-1)^3}x^2$

Cvičení 7.4. tečna $2x - y = 0$, normála $x + 2y = 0$

Cvičení 7.5. $x_0 = 0$ lokální minimum, $x_0 = \frac{1}{2}$ lokální maximum

Cvičení 7.6. $z_x = \frac{y}{1+\mathrm{e}^z}$, $z_x(-2, 1) = \frac{1}{2}$, $z_y = \frac{x}{1+\mathrm{e}^z}$, $z_y(-2, 1) = -1$

Cvičení 7.7. $z_x = \frac{z\sin xz - y\cos xy}{y\cos yz - x\sin xz}$, $z_x(\frac{2}{3}, 0) = -\frac{3\pi}{4}$, $z_y = -\frac{x\cos xy + z\cos yz}{y\cos yz - x\sin xz}$, $z_y(1,0) = \frac{\sqrt{3}(4+3\pi)}{6}$

Cvičení 7.8. $z_x(0,1) = z_y(0,1) = 1$, $z_{xx}(0,1) = -1$, $z_{xy}(0,1) = z_{yy}(0,1) = 0$

Cvičení 7.9. $x + y - z = 1$

Cvičení 7.10. $z_0 = -1$, $\frac{5}{4}x + y + z - \frac{1}{2} = 0$

7.6 Kontrolní test

Start testu **Implicitní funkce**

1. Ověřte, že daná rovnice $\sin^2(\mathrm{e}^{x+y}) = x\ln y + (\sin 1)^2$ zadává v okolí bodu $P = [-1, 1]$ implicitně jedinou funkci jedné proměnné $y = f(x)$.

(a) Vypočítejte její první derivaci.

☐ $\frac{\mathrm{e}^{x+y}\cos 2\mathrm{e}^{x+y}+\ln y}{\frac{x}{y}-\mathrm{e}^{x+y}\cos 2\mathrm{e}^{x+y}}$ ☐ $\frac{-\mathrm{e}^{x+y}\sin 2\mathrm{e}^{x+y}+\ln y}{2\mathrm{e}^{x+y}\sin \mathrm{e}^{x+y}\cos \mathrm{e}^{x+y}-\frac{x}{y}}$

☐ $\frac{-\mathrm{e}^{x+y}\sin \mathrm{e}^{x+y}\cos \mathrm{e}^{x+y}-\ln y}{2\mathrm{e}^{x+y}\sin \mathrm{e}^{x+y}\cos \mathrm{e}^{x+y}+\frac{x}{y}}$ ☐ $\frac{-\mathrm{e}^{x+y}\cos 2\mathrm{e}^{x+y}+\ln y}{\frac{x}{y}-\mathrm{e}^{x+y}\sin 2\mathrm{e}^{x+y}}$

(b) Určete hodnotu první derivaci v bodě P.

☐ $\frac{-\cos 2}{1-\sin 1\cos 2}$ ☐ $\frac{2\sin 1\cos 1+2}{2\cos 2-2}$

☐ $\frac{-\cos 1\sin 1-\ln 1}{2\sin 2\cos 1-1}$ ☐ $\frac{\sin 2}{-1-2\cos 1\sin 1}$

2. Ověřte, že daná rovnice $\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ zadává v okolí bodu $[-2, 0]$ implicitně jedinou funkci jedné proměnné $y = f(x)$.Vypočítejte její první derivaci v bodě $[-2, 0]$.

$y'(-2) =$ ☐

3. Nechť je dána implicitní funkce y rovnicí $xe^{2y} - y\ln x = 8$ v bodě $[1, ?]$.

(a) Určete druhou souřadnici bodu $[1, ?]$:

☐ $\ln 8$ ☐ $\ln^2\sqrt{8}$

☐ $\ln^{\frac{1}{2}}\sqrt{8}$ ☐ $\frac{3\ln 2}{2}$

(b) Vypočítejte hodnotu první derivace implicitní funkce v daném bodě:

☐ $y'(1) = -\frac{\ln 8+16}{32}$ ☐ $y'(1) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln\sqrt{8}}{16}$

☐ $y'(1) = \frac{\ln\sqrt{8}-16}{32}$ ☐ $y'(1) = \frac{\ln\sqrt{8}+16}{32}$

(c) Vypočítejte hodnotu druhé derivace implicitní funkce v daném bodě:

☐ $y''(1) = \frac{1}{256}[112 - 7\ln 8 - \ln^2 8]$

☐ $y''(1) = \frac{1}{512}[224 - 8\ln 8 - \ln^2 8]$

☐ $y''(1) = \frac{1}{256}[112 - 7\ln 8 - \ln^2\sqrt{8}]$

☐ $y''(1) = \frac{1}{512}[112 - 7\ln^{\frac{1}{2}} 8 - \ln^{\frac{1}{2}} 8]$

4. Ověřte, že daná rovnice $\sin(\sin y) + \cos(\sin x) = 1$ zadává v okolí bodu $P = [0, 0]$ implicitně jedinou funkci jedné proměnné $y = f(x)$.Vypočítejte její první a druhou v bodě P.

(a) Hodnota první derivace implicitní funkce v bodě P je: ☐

(b) Hodnota druhé derivace implicitní funkce v bodě P je: ☐

5. Ověřte, že daná rovnice $\mathrm{e}^{xy} - \sin y + y^2 = -1 + \frac{\pi^2}{4}$ zadává v okolí bodu $P = [0, \frac{\pi}{2}]$ implicitně jedinou funkci jedné proměnné $y = f(x)$. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě P.

(a) Tečna má rovnici:

☐ $t: \frac{1}{2}x + y + \frac{\pi}{2} = 0$ ☐ $t: \frac{1}{2}x + y - \pi = 0$
☐ $t: x + 2y - \pi = 0$ ☐ $t: \frac{1}{2}x + 2y + \frac{\pi}{2} = 0$

(b) Normála má rovnici:

☐ $n: 4x - 2y + \pi = 0$ ☐ $n: 2x - y + \pi = 0$
☐ $n: 2x + y + \frac{\pi}{2} = 0$ ☐ $n: -4x - 2y + \pi = 0$

6. K rovnici $x^3 + 3y^2 - 3xy = 0$ najděte body, v nichž jsou splněny všechny předpoklady věty o implicitní funkci a které jsou stacionárními body takto implicitně definované funkce jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.

(a) $x = 0$ lok. minimum, $x = \frac{1}{2}$ lok. maximum
(b) $x = 0$ lok. maximum
(c) $x = \frac{2}{3}$ lok. minimum, $x = 0$ lok. maximum
(d) $x = \frac{2}{3}$ lok. maximum

7. Ověřte, že daná rovnice $\sqrt{xy} - z + \ln(x^2 + y^2) = 0$ zadává v okolí bodu $P = [1, 1, 1 + \ln 2]$ implicitně jedinou funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$.

(a) Spočtěte její první parciální derivace.

☐ $z_x = \frac{y}{2\sqrt{xy}} + \frac{2x}{x^2+y^2}$, $z_y = \frac{x}{2\sqrt{xy}} + \frac{2y}{x^2+y^2}$ ☐ $z_x = -\frac{x}{2\sqrt{xy}} + \frac{2x}{x^2+y^2}$, $z_y = \frac{y}{2\sqrt{xy}} + \frac{2x}{x^2+y^2}$
☐ $z_x = \frac{y}{2\sqrt{xy}} + \frac{2y}{x^2+y^2}$, $z_y = \frac{x}{2\sqrt{xy}} + \frac{2x}{x^2+y^2}$ ☐ $z_x = \frac{x}{2\sqrt{xy}} + \frac{2y}{x^2+y^2}$, $z_y = \frac{y}{2\sqrt{xy}} - \frac{2x}{x^2+y^2}$

(b) Spočtěte její první parciální derivace v bodě P.

☐ $z_x = \frac{3}{2}$, $z_y = \frac{3}{2}$ ☐ $z_x = \frac{1}{2}$, $z_y = \frac{3}{2}$
☐ $z_x = \frac{3}{2}$, $z_y = \frac{1}{2}$ ☐ $z_x = \frac{1}{2}$, $z_y = \frac{1}{2}$

8. Ověřte, že daná rovnice $x^4 - y^3 + 8 = \operatorname{tg}(e^{2x} - z)$ zadává v okolí bodu $P = [0, 2, 1]$ implicitně jedinou funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$. Spočtěte její první parciální derivace v bodě P.

(a) $z_x(0, 2) = 0$, $z_y(0, 2) = 2$ (b) $z_x(0, 2) = 1$, $z_y(0, 2) = 2$
(c) $z_x(0, 2) = 2$, $z_y(0, 2) = 6$ (d) $z_x(0, 2) = 0$, $z_y(0, 2) = 1$

9. Ověřte, že daná rovnice $y^4 = x^3 z^3 - y^3 z^2$ zadává v okolí bodu $P = [0, -2, \sqrt{2}]$ implicitně jedinou funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$. Spočtěte její první parciální derivace v bodě P.

(a) $z_x(0, -2) =$ ☐

(b) $z_y(0, -2) =$ ☐

10. Ověřte, že daná rovnice $z - \cos(2x + 3y) = 0$ zadává v okolí bodu $P = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, ?]$ implicitně jedinou funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě P.

(a) $2x - 3y + z = 0$

(b) $4x - 6y + z = 3\pi$

(c) $x - \frac{3}{2}y - \frac{1}{3}z + 3\pi = 0$

(d) $2x + 3y - z = \frac{3}{2}\pi$

Konec testu Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek:

Procento úspěšnosti:

Zobrazení správného výsledku:

8 Lokální extrémy funkcí n proměnných

Klíčová slova. Kvadratická forma, lokální maximum, lokální minimum, stacionární bod.

Dříve než se začneme zabývat vyšetřováním extrémních hodnot funkcí více proměnných, provedeme stručnou rekapitulaci postupu při hledání extrémů u funkcí jedné proměnné. Základní informace umožňující určit druh extrému vychází u funkcí jedné proměnné z poznatků o vlastnostech první a druhé derivace. Zatímco pro nalezení potenciálních extrémů je nutné určit nulové body první derivace, druh extrému určujeme pomocí druhé derivace. Budeme-li chtít provést předběžné úvahy o tom, jak by mohl vypadat postup při hledání extrémů funkcí více proměnných, napadne nás využít k nalezení potenciálních extrémů parciálních derivací prvního řádu. K této úvaze nás vede jejich využití pro sestrojení tečné roviny, obzvlášť uvědomíme-li si, že z nulových hodnot těchto derivací vyplývá, že tečná rovina v daném bodě je rovnoběžná s rovinou xy. Zde je zjevná geometrická analogie s funkcemi jedné proměnné, u kterých nulovost první derivace znamená, že tečna sestrojená v příslušném bodě je rovnoběžná s osou x.

Obtížněji už lze nahlédnout, jakým způsobem by bylo možné využít parciálních derivací druhého řádu. V dalším uvidíme, že jejich nalezení skutečně má význam pro určení druhu extrému. Jejich hodnoty totiž ovlivňují vlastnosti druhého diferenciálu vyšetřované funkce. Druhý diferenciál je vlastně z hlediska přírůstků proměnných kvadratickým polynomem. Ke zkoumání jeho vlastností se využívá poznatků o kvadratických formách, které máme k dispozici z lineární algebry. Proto začneme výklad problematiky vyšetřování lokálních extrémů funkcí více proměnných krátkou „exkurzí“ do oblasti kvadratických forem, při které uvedeme ovšem jen to nejnutnější pro naše další úvahy.

8.1 Kvadratické formy

Definice 8.1. Kvadratickou formou n proměnných nazýváme polynom druhého stupně n argumentů, který lze psát v následujícím tvaru

$$\Phi_2(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i,j=1, i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

kde $a_{ij} = a_{ji}$.

Poznámka 8.2. Např. kvadratická forma dvou argumentů má tvar

$$\Phi_2(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Poznámka 8.3. Sestavíme-li z čísel a_{ij} symetrickou matici a chápeme-li x jako n-rozměrný vektor, můžeme kvadratickou formu zapsat ve tvaru $\Phi_2(x_1, x_2, \dots x_n) = x^T Ax$, kde symbol ^{T} značí transponovanou matici.

Další zápis je možné získat, pokud využijeme skalárního součinu. Pak lze psát $\Phi_2(x_1, x_2, \dots x_n) = x^T Ax = \langle Ax, x\rangle$.

Je zřejmé, že všechny kvadratické formy nabývají v počátku nulové hodnoty. Podle toho, jakých hodnot nabývají mimo počátek, je dělíme na pět druhů.

Definice 8.4. Kvadratická forma n proměnných se nazývá

- **kladně definitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá pouze kladných hodnot;
- **záporně definitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá pouze záporných hodnot;
- **kladně semidefinitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá pouze nezáporných hodnot;
- **záporně semidefinitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá pouze nekladných hodnot;
- **indefinitní**, jestliže v některých bodech různých od počátku nabývá kladných hodnot, zatímco v jiných bodech různých od počátku nabývá záporných hodnot.

Příklad 8.5. Rozhodněte o druhu kvadratické formy, která je daná ve tvaru $\Phi_2(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$.

Řešení. Upravíme formu Φ_2 následovně

$$\Phi_2(x_1, x_2) = a\left(x_1^2 + 2\frac{b}{a}x_1x_2\right) + cx_2^2 = a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 - \frac{b^2}{a}x_2^2 + cx_2^2 =$$

$$= a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \frac{1}{a}\left(ac - b^2\right)x_2^2, \qquad a \neq 0.$$

Nyní lze nahlédnout, že druh kvadratické formy závisí na koeficientu a a dále pak na výrazu $ac - b^2$, který nazýváme diskriminantem kvadratické formy Φ_2 a značíme písmenem D, tj. $D = ac - b^2$. Možnosti, které mohou nastat, můžeme rozdělit následujícím způsobem:

- Je-li $D > 0$, je kvadratická forma Φ_2 definitní, a to
  - kladně, je-li $a > 0$
  - záporně, je-li $a < 0$.
- Je-li $D < 0$, je kvadratická forma Φ_2 indefinitní.
- Je-li $D = 0$, je kvadratická forma Φ_2 semidefinitní, a to
  - kladně, je-li $a > 0$
  - záporně, je-li $a < 0$.

Je-li $a = 0$ a $b \neq 0$, je kvadratická forma Φ_2 indefinitní. Lze totiž snadno nahlédnout, že za těchto podmínek může být pro libovolné hodnoty koeficientu c výraz $2bx_1x_2 + cx_2^2$ kladný, resp. záporný. Stačí vhodně zvolit hodnotu proměnné x_1. Je rovněž zřejmé, že v tomto případě je diskriminant D záporný.

Pokud $a = 0$, $b = 0$, je kvadratická forma Φ_2 kladně semidefinitní pro $c > 0$ a záporně semidefinitní pro $c < 0$. V tomto připadě platí $D = 0$.

Jestliže nyní dosažené výsledky shrneme, vidíme, že kvadratická forma Φ_2 je

- kladně, resp. záporně definitní, jestliže platí $D > 0$;
- kladně, resp. záporně semidefinitní, je-li $D = 0$;
- indefinitní, pokud $D < 0$.

V jednodušších případech je možné o druhu kvadratické formy rozhodnout na základě jednoduchých úvah. Ve složitějších případech ale s úsudkem nevystačíme a k rozhodnutí o druhu kvadratické formy využíváme větu, která se opírá o vlastnosti symetrického determinantu tvořeného koeficienty kvadratické formy a_{ij}. Tento determinant nazýváme diskriminantem kvadratické formy a má následující tvar

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Při zkoumání vlastností diskriminantu mají klíčový význam jeho minory tvaru

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

které nazýváme **základní hlavní minory** diskriminantu D příslušného k dané kvadratické formě. Větu, která umožňuje rozhodnout na základě vlastností základních hlavních minorů o druhu kvadratické formy, dokázal již v předminulém století James Joseph Sylvester.

Věta 8.6. *Nechť D_1, D_2,..., D_n jsou základní hlavní minory determinantu D kvadratické formy Φ. Pak je tato forma*

- *kladně definitní, právě když jsou všechny její základní hlavní minory kladné;*
- *záporně definitní, právě když je kvadratická forma $-\Phi$ kladně definitní.*

Poznámka 8.7. Věta, kterou Sylvester dokázal, je ve skutečnosti obecnější a zahrnuje rovněž kritérium pro určení semidefinitnosti. Nicméně pro naše účely vystačíme s námi uvedenou verzí. Poznamenáváme jen, že kritérium kladné semidefinitnosti je dáno nezáporností tzv. hlavních minorů, což jsou všechny základní hlavní minory, a dále minory, jejichž diagonální prvky jsou brány z diagonály diskriminantu. Záporná semidefinitnost se opět stanoví vyšetřením kvadratické formy $-\Phi$.

Příklad 8.8. Určete druh kvadratické formy, kterou máme dánu ve tvaru $\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Řešení. Sestavme příslušné determinanty

$$D_1 = -1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Snadno vypočteme, že $D_1 < 0$, $D_2 = 1 > 0$ a $D_3 = -2 < 0$. Vidíme tedy, že forma Φ_2 není kladně definitní. Jestliže chceme ověřit zda je tato forma záporně definitní, musíme uvažovat formu $-\Phi_2$. V uvažovaných determinantech se tedy u všech prvků změní znaménka. Tato znaménková změna se projeví tak, že všechny determinanty lichého řádu změní znaménko, zatímco u determinantů sudého řádu zůstane znaménko zachováno. Forma $-\Phi_2$ bude tedy mít všechny tři základní hlavní minory kladné a to tedy znamená, že původní forma je záporně definitní.

Poznámka 8.9. Z postupu, který jsme použili v předcházejícím příkladu, vyplývá následující praktické kritérium pro určení záporné definitnosti kvadratické formy:
Kvadratická forma Φ je záporně definitní právě tehdy, když jsou všechny základní hlavní minory lichého řádu diskriminantu D záporné a všechny základní hlavní minory sudého řádu diskriminantu D kladné, tj. právě tehdy, když základní hlavní minory $D_1, \ldots, D_n = D$ pravidelně střídají znaménko počínaje záporným.

Poznámka 8.10. Zbývá ještě stanovit, kdy je kvadratická forma indefinitní. Jestliže uvážíme, že hlavní minory sudého řádu mají stejnou hodnotu pro formu Φ i $-\Phi$ a že kritérium pro kladně definitní, resp. semidefinitní formu vyžaduje, aby byly základní hlavní minory kladné, resp. hlavní minory nezáporné, dojdeme k závěru, že je-li alespoň jeden z hlavních minorů sudého řádu záporný, je daná kvadratická forma indefinitní. Získáváme tím však jen postačující podmínku pro určení indefinitnosti a ne nutnou, protože uvedenou implikaci nelze obrátit. Nicméně pro účely tohoto textu s ní vystačíme.

8.2 Lokální extrémy

Definice 8.11. Říkáme, že funkce n proměnných $f(x_1, \dots x_n)$ má v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ svého definičního oboru **lokální maximum**, popř. **lokální minimum**, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*) \subseteq \mathcal{D}f$ takové, že platí

$$f(x) \leq f(x^*), \qquad \text{popř.} \qquad f(x) \geq f(x^*)$$

pro každý bod $x \in \mathcal{O}(x^*)$. Jsou-li uvedené nerovnosti splněny pro $x \neq x^*$ ostře, hovoříme o **ostrém** lokálním maximu, popř. minimu.
Souhrnně nazýváme maximální a minimální hodnoty funkce f jejími **extremálními hodnotami**, stručně jen extrémy.

V dalším se budeme zabývat odvozením nutných a postačujících podmínek pro existenci lokálního extrému funkce f za předpokladu, že v daném bodě má funkce parciální derivace. Jak jsme již naznačili v úvodu této kapitoly, budeme postupovat podobně jako u funkcí jedné proměnné, což znamená, že k formulaci nutné podmínky využijeme stacionárního bodu a při formulaci postačujících podmínek budeme vycházet z parciálních derivací druhého řádu.

Věta 8.12. *(Fermatova) Předpokládejme, že funkce $f(x_1, \dots x_n)$ má lokální extrém v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ a že v bodě x^* existuje parciální derivace funkce f podle proměnné x_i, $1 \leq i \leq n$. Pak platí*

$$f_{x_i}(x^*) = 0.$$

Důkaz. Nechť má funkce f extrém v bodě x^*. Položme

$$\phi(x_i) = f(x_1^*, \dots, x_i, \dots, x_n^*).$$

Protože funkce f nabývá v bodě x^* lokálního extrému, má i funkce $\phi(x_i)$ extrém v bodě x_i^*, a tedy $\phi'(x_i^*) = 0$. Zároveň ale platí

$$\phi'(x_i) = f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_i, \dots, x_n^*).$$

To ovšem ale znamená, že $f_{x_i}(x^*) = 0$. ◇

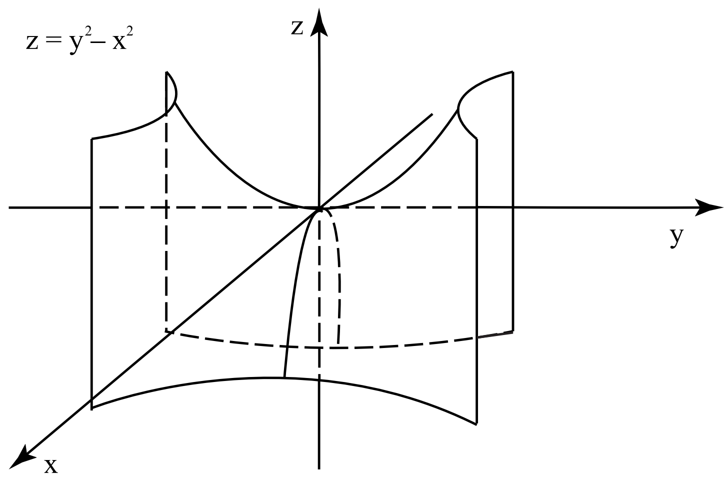
Definice 8.13. Bod x^*, ve kterém jsou všechny parciální derivace prvního řádu funkce n nulové, nazýváme **stacionárním bodem** funkce f.

Z věty 8.12 nyní dostáváme nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému.

Důsledek 8.14. *Nechť má funkce f v bodě x^*, ve kterém existují všechny parciální derivace prvního řádu funkce f, lokální extrém. Pak x^* je stacionárním bodem funkce f.*

Fermatova věta nevylučuje možnost, že lokální extrém nastane v bodě, který není stacionárním bodem kvůli neexistenci parciálních derivací.

Dále poznamenáváme, že podmínky Fermatovy věty nejsou postačující pro existenci lokálního extrému. Příkladem, který ilustruje tento případ, je funkce $f(x, y) = y^2 - x^2$. Tato funkce má stacionární bod v počátku, přičemž platí $f(0, 0) = 0$. Dále pak máme $f(x, 0) = -x^2 < 0$ pro $x \neq 0$ a rovněž $f(0, y) = y^2 > 0$ pro $y \neq 0$. Z uvedeného vyplývá, že na každém prstencovém okolí počátku nabývá funkce kladných i záporných hodnot. Situaci ilustruje obrázek 16.



Obrázek 16: Počátek jako sedlový bod funkce $f(x, y) = y^2 - x^2$

Příklad 8.15. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = (x+2)^2+(y-3)^2$.

Řešení. Jelikož funkce f má parciální derivace v celém svém definičním oboru, může nabývat extrémních hodnot pouze ve stacionárních bodech. Ty nalezneme tak, že vypočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Ze vztahů

$$f_x = 2(x+2), \quad f_y = 2(y-3) \qquad \text{vyplývá} \qquad x=-2, \quad y=3,$$

přičemž platí $f(-2,3) = 0$. Dále snadno nahlédneme, že $(x+2)^2 > 0$ pro $x \neq -2$ a $(y-3)^2 > 0$ pro $y \neq 3$. Vidíme tedy, že bod $[-2,3]$ je bodem lokálního minima funkce f.

Příklad 8.16. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2-(y-1)^2$

Řešení. Obdobně jako v předcházejícím příkladě je nutné položit parciální derivace, které existují v celém definičním oboru funkce f, rovny nule. Obdržíme tedy vztahy

$$f_x = 2x, \quad f_y = -2(y-1), \qquad \text{a odtud} \qquad x=0, \quad y=1,$$

přičemž platí $f(0,1) = 0$. Dále snadno nahlédneme, že v případě, kdy $x = 0$ máme $-(y-1)^2 < 0$ pro $y \neq 1$ a naopak pro $y = 1$ platí $x^2 > 0$ pro $x \neq 0$. Z provedených úvah je zřejmé, že funkce f nabývá na libovolně malém okolí bodu $[0,1]$ kladných i záporných hodnot. Nemůže tedy nabývat v tomto bodě extrémní hodnoty.

Věta 8.17. *Nechť $x^* = [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*]$ je stacionární bod funkce, v jehož okolí má funkce f spojité všechny parciální derivace druhého řádu. Uvažujme kvadratickou formu Φ, kterou představuje diferenciál druhého řádu funkce f v bodě x^*, tj. kvadratickou formu tvaru*

$$\mathrm{d}^2 f(x^*) = (h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots h_n\frac{\partial}{\partial x_n})^2 f(x^*) = \Phi(h_1, h_2, \ldots, h_n).$$

V bodě x^* nastává lokální extrém, a to

- *ostré lokální maximum, je-li Φ záporně definitní forma,*
- *ostré lokální minimum, je-li Φ kladně definitní forma.*

Je-li Φ indefinitní forma, pak v bodě x^* lokální extrém nenastává.

Důkaz. Větu dokážeme pro funkci dvou proměnných. V případě funkce n proměnných bychom postupovali zcela analogicky. Jestliže rozvineme funkci do Taylorovy řady v bodě x^*, dostáváme na okolí bodu $\mathcal{O}(x)$ vztah

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(x^*) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(\Theta),$$

kde $\Theta = [x_1^* + \theta h_1, x_2^* + \theta h_2]$ pro vhodné číslo $\theta \in (0,1)$. Vzhledem k předpokladu, že x^* je stacionární bod, platí $\mathrm{d}f(x^*) = 0$. To ale znamená, že pro rozdíl funkčních hodnot funkce f v bodech x a x^* dostáváme

$$f(x) - f(x^*) = \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\Theta)h_1^2 + 2f_{xy}(\Theta)h_1h_2 + f_{yy}(\Theta)h_2^2\right).$$

Vzhledem k předpokladu spojitosti parciálních derivací funkce f druhého řádu platí

$$\lim_{\theta\to 0}\left(f_{xx}(\Theta)h_1^2 + 2f_{xy}(\Theta)h_1h_2 + f_{yy}(\Theta)h_2^2)\right) =$$
$$= f_{xx}(x^*)h_1^2 + 2f_{xy}(x^*)h_1h_2 + f_{yy}(x^*)h_2^2 = \mathrm{d}^2 f(x^*).$$

Pokud tedy platí, že $\mathrm{d}^2 f(x^*) \neq 0$, pak na dostatečně malém okolí bodu x^*, tj. pro dostatečně malé θ, díky spojitosti diferenciálu druhého řádu platí

$$\operatorname{sgn} \mathrm{d}^2 f(\Theta) = \operatorname{sgn}\left(f_{xx}(\Theta)h_1^2 + 2f_{xy}(\Theta)h_1h_2 + f_{yy}(\Theta)h_2^2\right) =$$
$$= \operatorname{sgn}\left(f_{xx}(x^*)h_1^2 + 2f_{xy}(x^*)h_1h_2 + f_{yy}(x^*)h_2^2\right) = \operatorname{sgn} \mathrm{d}^2 f(x^*).$$

Odtud vidíme, že znaménko rozdílu funkčních hodnot funkce f v bodech x a x^* je dáno vztahem

$$\operatorname{sgn}[f(x) - f(x^*)] = \operatorname{sgn}[f_{xx}(x^*)h_1^2 + 2f_{xy}(x^*)h_1h_2 + f_{yy}(x^*)h_2^2] = \Phi(h_1, h_2).$$

Nyní je zřejmé, že stačí vyšetřit vlastnosti kvadratické formy, kterou představuje diferenciál druhého řádu funkce f. Druh této kvadratické formy Φ určuje znaménko rozdílu $f(x) - f(x^*)$. Shrneme-li obdržené závěry, dostaneme následující výsledky:

- Je-li $\Phi(h_1, h_2)$ kladně definitní forma, je $\Phi(h_1, h_2) > 0$ za předpokladu $(h_1, h_2) \neq (0,0)$, a proto na vhodném prstencovém okolí platí nerovnost $f(x) - f(x^*) > 0$, tj. $f(x) > f(x^*)$. V bodě x^* nastává tedy ostré lokální minimum funkce f.

- Je-li $\Phi(h_1, h_2)$ záporně definitní forma, je $\Phi(h_1, h_2) > 0$ za předpokladu $(h_1, h_2) \neq (0,0)$, a proto na vhodném prstencovém okolí platí nerovnost $f(x) - f(x^*) < 0$, tj. $f(x) < f(x^*)$. V bodě x^* nastává tedy ostré lokální maximum funkce f.

- Je-li $\Phi(h_1, h_2)$ indefinitní forma, může být rozdíl $f(x) - f(x^*)$ kladný i záporný ve vhodně zvolených bodech z nějakého okolí bodu x^*. To ovšem ale znamená, že funkce f nemůže mít extrém v bodě x^*. ◇

Poznámka 8.18. V případě, že je druhý diferenciál některou ze semidefinitních forem, může ale nemusí nastat v bodě x^* extrém. K rozhodnutí o existenci extrému je však nutné zkoumat vlastnosti funkce f použitím jiných metod. Těmito postupy se ale nebudeme zabývat.

Poznámka 8.19. Sylvesterovu větu můžeme aplikovat na diferenciál druhého řádu, položíme-li $f_{x_i x_j} = a_{ij} = f_{x_j x_i} = a_{ji}$. Matice kvadratické formy, kterou představuje diferenciál druhého řádu v bodě x^* má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x^*) & f_{x_1x_2}(x^*) & \dots & f_{x_1x_n}(x^*) \\ f_{x_2x_1}(x^*) & f_{x_2x_2}(x^*) & \dots & f_{x_2x_n}(x^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_nx_1}(x^*) & f_{x_nx_2}(x^*) & \dots & f_{x_nx_n}(x^*) \end{pmatrix}.$$

Tuto matici nazýváme *druhou derivací* funkce f nebo také *hessiánem* a značíme ji symbolem $f''(x^*)$.

Příklad 8.20. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 - x^2y + y^2 + 4y$.

Řešení. Z předcházejících příkladů již víme, že nejdříve musíme najít nulové body parciálních derivací funkce f prvního řádu. Dostáváme tedy

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 2xy = x(3x - 2y) \qquad \text{a} \qquad f_y(x, y) = -x^2 + 2y + 4.$$

a dále ze vztahu

$$x(3x - 2y) = 0$$

vidíme, že rovnost nastává tehdy, jestliže $x = 0$ nebo $3x = 2y$. Z první možnosti vyplývá, že $y = -2$. Druhá možnost vede na řešení kvadratické rovnice, $x^2 - 3x - 4 = 0$, jejíž kořeny jsou $x = 4$ a $x = -1$. Těmto řešením odpovídají hodnoty $y = 6$ a $y = -3/2$. Výsledkem našich výpočtů jsou tedy celkem tři stacionární body $S_1 = [0, -2]$, $S_2 = [4, 6]$ a $S_3 = [-1, -3/2]$. V dalším postupu ukážeme, jakým způsobem lze rozhodnout o tom, zda se jedná o body, ve kterých funkce f nabývá extrému či ne. K tomu je nutné vyšetřit vlastnosti kvadratické formy tvaru

$$\Phi(h_1, h_2) = f_{xx}h_1^2 + 2f_{xy}h_1h_2 + f_{yy}h_2^2.$$

Vidíme tedy, že nejprve je nutné vypočítat parciální derivace druhého řádu funkce f. Jednoduchý výpočet nám dává

$$f_{xx} = 6x - 2y, \quad f_{xy} = -2x, \quad f_{yy} = 2.$$

Hodnoty parciálních derivací budeme vyčíslovat pro každý stacionární bod zvlášť.

- Pro bod $S_1 = [0, -2]$ má kvadratická forma tvar
  $\Phi(h_1, h_2) = 4h_1^2 + 0 \cdot h_1 h_2 + 2h_2^2$.
  Příslušné minory jsou

  $$D_1 = 4 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0.$$

  Příslušná kvadratická forma je kladně definitní a to znamená, že bod $S_1 = [0, -2]$ je bodem lokálního minima funkce f.

- Pro bod $S_2 = [4, 6]$ má kvadratická forma tvar
  $\Phi(h_1, h_2) = 12h_1^2 - 16h_1 h_2 + 2h_2^2$.
  Příslušné minory jsou

  $$D_1 = 12 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} < 0.$$

  Kvadratická forma je tedy indefinitní, protože minor sudého řádu je záporný. V důsledku toho je bod $S_2 = [4, 6]$ sedlovým bodem funkce f.

- Pro bod $S_3 = [-1, -3/2]$ má kvadratická forma tvar
  $\Phi(h_1, h_2) = -3h_1^2 + 4h_1 h_2 + 2h_2^2$.
  Příslušné minory jsou

  $$D_1 = -3 < 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} < 0.$$

  Příslušná kvadratická forma je tedy opět indefinitní, což znamená, že bod $S_3 = [-1, -3/2]$ je sedlovým bodem funkce f.

8.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 8.1. Určete druh kvadratické formy, kterou máme dánu ve tvaru $\Phi_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_1 x_2$.

Cvičení 8.2. Určete druh kvadratické formy, kterou máme dánu ve tvaru $\Phi_2(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$.

Cvičení 8.3. Určete druh kvadratické formy, kterou máme dánu ve tvaru $\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Cvičení 8.4. Určete druh kvadratické formy, kterou máme dánu ve tvaru $\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$.

Cvičení 8.5. Najděte všechny kritické body funkce, která je daná vztahem $f(x, y) = xy - x - y$, a určete, zda se jedná o bod lokálního maxima, lokálního minima nebo o sedlový bod.

Cvičení 8.6. Najděte všechny kritické body funkce, která je daná vztahem $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 3y^2 - 15x + 6$, a určete, zda se jedná o bod lokálního maxima, lokálního minima nebo o sedlový bod.

Cvičení 8.7. Najděte bod, ve kterém je tečná rovina ke grafu funkce $f(x, y) = x^2 + 4x + y^3$ rovnoběžná s rovinou xy.

Cvičení 8.8. Najděte všechny lokální extrémy funkce, která je daná vztahem $f(x, y) = 4x^3 + y^3 - 12x - 3y$.

Cvičení 8.9. Najděte všechny lokální extrémy funkce, která je daná vztahem $f(x, y) = xy - \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + 3$.

Cvičení 8.10. Najděte všechny lokální extrémy funkce, která je daná vztahem $f(x, y) = \sin x + \sin y$.

8.4 Výsledky úloh k samostatnému řešení

Cvičení 8.1. Indefinitní.

Cvičení 8.2. Záporně definitní.

Cvičení 8.3. Indefinitní.

Cvičení 8.4. Kladně definitní.

Cvičení 8.5. $[1, 1]$, sedlový bod.

Cvičení 8.6. $[\sqrt{5}, 0]$ – lokální minimum, $[-\sqrt{5}, 0]$ – lokální maximum, $[-1, 2]$, $[-1, -2]$ – sedlové body.

Cvičení 8.7. $[-2, 0, -4]$.

Cvičení 8.8. $f(-1, -1) = 10$ – lokální maximum , $f(1, 1) = -10$ – lokální minimum.

Cvičení 8.9. $f(-1, -2) = 9$ – lokální minimum.

Cvičení 8.10. Lokální maximum $f((2m + 1)\pi/2, (2n + 1)\pi/2) = 2$, jsou-li m a n sudá; lokální minimum $f((2m + 1)\pi/2, (2n + 1)\pi/2) = -2$, jsou-li m a n lichá.

9 Vázané extrémy

Klíčová slova. Vázané lokální minimum, vázané lokální maximum, Lagrangeova funkce, Lagrangeovy multiplikátory.

V předchozí kapitole pojednávající o volných lokálních extrémech jsme si připravili cestu k vyšetřování tzv. vázaných extrémů neboli lokálních extrémů vázaných vedlejšími podmínkami. Tyto úlohy jsou charakteristické tím, že kromě funkce, jejíž extrém hledáme, jsou předepsány další dodatečné podmínky, které mění povahu optimalizační úlohy.

9.1 Lokální extrémy s vazbou

Definice 9.1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kde $1 \leq m < n$, jsou funkce. Položme $M = \{x \in \mathbb{R}^n; g_1(x) = 0 \wedge \dots \wedge g_m(x) = 0\}$. Nechť $M \subset \mathcal{D}(f)$, $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in M$. Existuje-li okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x^*) \cap M$ platí $f(x) \geq f(x^*)$, říkáme, že funkce f má v bodě x^* **lokální vázané minimum**. Řekneme, že funkce f má v bodě $x^* \in M$ **lokální vázané maximum**, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x^*) \cap M$ platí $f(x) \leq f(x^*)$. Lokální vázaná minima a maxima funkce f se nazývají **lokální vázané extrémy**.

Poznámka 9.2.

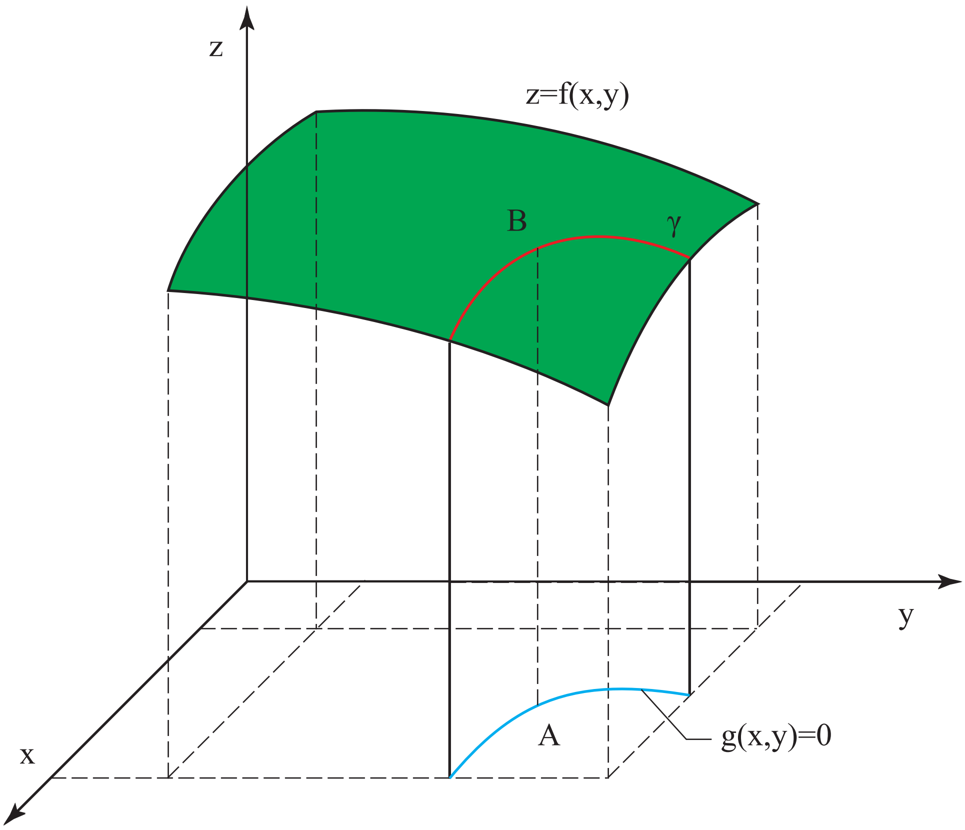
1. Rovnice $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$ se nazývají *vazebné rovnice* nebo také *vazebné podmínky*

2. Místo termínu lokální vázaný extrém se může použít termínu lokální extrém vzhledem k M nebo také lokální extrém vázaný podmínkami $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$.

3. V textu se budeme soustředit na funkce dvou či tří proměnných. Pro případ $n = 2$ budeme místo x_1, x_2 psát x, y. V případě, že $n = 3$ značíme x, y, z místo x_1, x_2, x_3.

Geometrická interpretace vázaných extrémů. Nechť $n = 2$, $m = 1$. Nechť $z = f(x, y)$ je spojitě diferencovatelná funkce na množině $M \subset \mathcal{D}(f)$ a M je zadána rovnicí $g(x, y) = 0$. Extrémy funkce f hledáme s ohledem na podmínku g. Extrémy mohou nastat pouze v bodech $[x, y]$ definičního oboru funkce f, které leží na křivce o rovnici $g(x, y) = 0$, tedy v bodech

$[x, y] \in M$. z-ové souřadnice těchto bodů, tj. funkční hodnoty odpovídající bodům $[x, y] \in M$, leží na křivce γ, která vznikne průnikem plochy $z = f(x, y)$ a plochy určené rovnicí $g(x, y) = 0$. Maximum a minimum funkce $f(x, y)$ s vazebnou podmínkou $g(x, y) = 0$ z geometrického hlediska najdeme na křivce γ, obrázek 17. Nechť funkce f má v bodě $A = [x_0, y_0] \in M$ lokální extrém vázaný podmínkou $g(x, y) = 0$, tj. $g(A) = 0$. Bodu A odpovídá na ploše $z = f(x, y)$ a křivce γ bod $B = [x_0, y_0, z_0]$, kde $z_0 = f(x_0, y_0)$.



Obrázek 17: Geometrická interpretace vázaných extrémů

Poznámka 9.3.

1. Všimněme si pro jednoduchost případu $n = 2$, $m = 1$. Pak M je křivka v $\mathbb{R}^2$ zadána rovnicí $g(x, y) = 0$. Předpokládejme, že je možno z této podmínky jednoznačně vyjádřit $y = \phi_1(x)$ resp. $x = \phi_2(y)$. Dosazením této funkce do dané funkce $f(x, y)$, převedeme úlohu najít vázaný lokální extrém na úlohu určit volný lokální extrém fukce jedné proměnné $f(x, \phi_1(x))$ resp. $f(\phi_2(y), y)$.

2. Tento postup není vždy praktický zejména při větším počtu proměnných. V takovém případě se používá tzv. metoda Lagrangeových multiplikátorů. Funkce definována vztahem

$$L(x,\lambda) = L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,\dots,x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1,\dots,x_n)$$

se nazývá *Lagrangeova funkce* a konstanty λ_k se nazývají *Lagrangeovy multiplikátoty.*

Podobně jako v kapitole o lokálních extrémech nejprve zformulujeme nutnou podmínku existence lokálního vázaného extrému.

Věta 9.4. *Nechť funkce n proměnných $f, g_1,\dots,g_m$, $1 \le m < n$, mají spojité parciální derivace 1. řádu v otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$ a nechť v každém bodě množiny U má matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & .. & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

hodnost m. Buď M množina všech bodů $x = [x_1,\dots,x_n]$, které vyhovují vazebným rovnicím $g_1(x) = 0,\dots,g_m(x) = 0$. Má-li funkce f v bodě $x^* = [x_1^*,\dots,x_n^*] \in M$ lokální extrém vzhledem k M, existují reálná čísla $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x^*) = 0, \quad j = 1,\dots,n. \tag{9.2}$$

Poznámka 9.5.

1. Bod $x^* = [x_1^*,\dots,x_n^*]$, který splňuje vazebné rovnice a je řešením (9.2), se nazývá stacionární bod. Tedy bod x^* z věty 9.4 je stacionární bod.

2. Označme matici (9.1) jako matici G. Matice G je tvořena vektory parciálních derivací funkce g_k, tj. g_k', $k = 1,\dots,m$. Podmínka, že hodnost matice G je rovna m znamená, že žádná z rovnic $g_k(x) = 0$, $k = 1,\dots,m$, není zbytečná.

3. Metodu multiplikátorů lze použít i v případě, kdy bude zadána množina $M = \{x \in \mathbb{R}^n; g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$ nikoli jen systémem rovností, ale také systémem nerovností. Tato obecnější úloha je popsána např. v [3] nebo [8].

Věta 9.4 říká, že lokální vázaný extrém může nastat pouze ve stacionárním bodě. Zda ve stacionárním bodě lokální extrém nastává či nenastává rozhodneme pomocí vlastností matice druhých derivací Lagrangeovy funkce $L''(x, \lambda)$. Zformulujeme si postačující podmínku pro existenci lokálního extrému.

Věta 9.6. *Nechť funkce f, $g_1, \dots, g_m$ jsou dvakrát spojitě diferencovatelné v bodě x^*, který je stacionárním bodem funkce f na M a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou příslušné Lagrangeovy multiplikátory, tj. $L'(x, \lambda) = 0$. Dále nechť matice (9.1) má v bodě x^* hodnost m. Jestliže pro všechna nenulová $h \in \mathbb{R}^n$ splňující podmínku*

$$\langle G(x^*), h \rangle = 0 \tag{9.3}$$

platí

$$\langle L''(x^*)h, h \rangle > 0, \tag{9.4}$$

má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum vzhledem k M. Jestliže pro všechna nenulová $h \in \mathbb{R}^n$ splňující podmínku (9.3) platí

$$\langle L''(x^*)h, h \rangle < 0, \tag{9.5}$$

má funkce f v bodě x^* ostré lokální maximum vzhledem k M.

Poznámka 9.7.

1. Důkazy k větám 9.4, 9.6 najděte např. v [2], [9].

2. Podmínka (9.3) udává, že skalární součin je roven nule. To znamená, že vektory h mají být kolmé k vektorů $g_k'(x^*)$, $k = 1, \dots, m$. Tyto vektory tvoří matici G, jejíž hodnost je m. Tedy vektory $g_k'(x^*)$ jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi nějakého m-rozměrného prostoru. Tento prostor se nazývá *normálový prostor* k množině M v bodě x^*, kde $M = \{x \in \mathbb{R}^n; g_k(x) = 0, k = 1, \dots, m\}$, a jeho ortogonální doplněk se nazývá *tečný prostor* k množině M v bodě x^*.

Nyní na základě věty 9.4 a věty 9.6 zformulujeme návod, jak postupovat při hledání vázaných extrémů funkcí se spojitými druhými derivacemi:

1) Zapíšeme vazebné rovnice ve tvaru $g_k(x) = 0$, $k = 1, \dots, m$ a určíme hodnost matice G.
2) Vytvoříme Lagrangeovu funkci L a určíme stacionární body funkce f vzhledem k M.
3) Spočteme druhou derivaci Lagrangeovy fukce L ve stacionárních bodech.
4) Určíme $h \in \mathbb{R}^n$.
5) Vyšetříme definitnost kvadratické formy $\langle L''(x^*)h, h\rangle$.

Příklad 9.8. Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = 5x^2 + y^2 - 4y - 10x$ vázané podmínkou $5x^2 + y^2 = 25$.

Řešení. Úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y) = 5x^2 + y^2 - 25$. Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = (10x, 2y)$ má hodnost 1. Hodnost této matice by byla od jedné různá, tedy nulová, pouze v případě, že $x = y = 0$. Tyto hodnoty však nevyhovují vazebné podmínce. Lagrangeova funkce má tvar

$$L(x, y, \lambda) = 5x^2 + y^2 - 4y - 10x + \lambda(5x^2 + y^2 - 25).$$

Spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule. Spolu s vazbou získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých vedoucí na výpočet stacionárních bodů Lagrangeovy funkce L:

$$\begin{aligned}
&L_x = 10x - 10 + 10x\lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{1+\lambda},\\
&L_y = 2y - 4 + 2y\lambda = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{1+\lambda},\\
&g(x, y) = 5x^2 + y^2 - 25 = 0,
\end{aligned}$$

kde $\lambda \neq -1$, jelikož by nebyly splněny rovnosti $L_x = 0$, $L_y = 0$. Vyjádřené hodnoty x a y dosadíme do rovnice vazby,

$$5\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^2 = 25 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{2}{5},\ \lambda_2 = -\frac{8}{5}$$

Pro $\lambda_1 = -\frac{2}{5}$ dopočítáme $x_1 = \frac{5}{3}$, $y_1 = \frac{10}{3}$, získali jsme stacionární bod $x_1^* = [\frac{5}{3}, \frac{10}{3}]$. Stejně postupujeme pro hodnotu $\lambda_2 = -\frac{8}{5}$, $x_2 = -\frac{5}{3}$, $y_2 = -\frac{10}{3}$, tedy $x_2^* = [-\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}]$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 10\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' jednotlivé stacionární body a příslušné hodnoty λ:

$$\lambda_1 = -\frac{2}{5};\ L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\frac{8}{5};\ L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2)$ splňující podmínku (9.3). Pro bod $x_1^* = [\frac{5}{3}, \frac{10}{3}]$ dostáváme $G(x_1^*) = (\frac{50}{3}, \frac{20}{3})$ a

$$\langle G(x_1^*), h\rangle = \left\langle \left(\frac{50}{3}, \frac{20}{3}\right), (h_1, h_2) \right\rangle = \frac{50}{3}h_1 + \frac{20}{3}h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = -\frac{2}{5}h_2,$$

tj. $h = \left(-\frac{2}{5}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h, h\rangle = \left(-\frac{2}{5}t, t\right) \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}t \\ t \end{pmatrix} = \frac{54}{25}t^2 > 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_1^* je podle věty 9.6 lokální minimum.
Podobně pro bod $x_2^* = [-\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}]$ dostáváme $G(x_2^*) = (-\frac{50}{3}, -\frac{20}{3})$ a

$$\langle G(x_2^*), h\rangle = \left\langle \left(-\frac{50}{3}, -\frac{20}{3}\right), (h_1, h_2) \right\rangle = -\frac{50}{3}h_1 - \frac{20}{3}h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = -\frac{2}{5}h_2,$$

tj. $h = \left(-\frac{2}{5}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_2^*)h, h\rangle = \left(-\frac{2}{5}t, t\right) \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}t \\ t \end{pmatrix} = -\frac{54}{25}t^2 < 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_2^* je podle věty 9.6 lokální maximum.

Příklad 9.9. Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ vázané podmínkou $x + y = 3$.

Řešení. Úlohu vyřešíme dvěma způsoby.
1) Z vazby $x + y = 3$ lze jednoznačně vyjádřit y, tedy $y = 3 - x$. Tento vztah dosadíme do zadané funkce $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, 3 - x) = x^2 + 3x(3 - x) - (3 - x)^2 = -3x^2 + 15x - 9.$$

Zadanou úlohu jsme tedy převedli na úlohu hledání extrémů funkce jedné proměnné. Platí

$$F'(x) = -6x + 15.$$

Derivaci položíme rovnu nule a nalezneme stacionární bod $x = \frac{5}{2}$. Protože $F''(x) = -6 < 0$, má funkce F v bodě $x = \frac{5}{2}$ lokální maximum. Dopočítáme $y = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$. Odtud plyne, že funkce $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ má v bodě $[\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$ vázané lokální maximum.

2) Úlohu můžeme řešit také pomocí Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y) = x+y-3 = 0$. Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = (1, 1)$ má hodnost 1. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 3xy - y^2 + \lambda(x + y - 3),$$

zderivujeme ji podle x a y a derivace položíme rovny nule

$$L_x = 2x + 3y + \lambda = 0, \quad L_y = 3x - 2y + \lambda = 0.$$

Z první rovnice vyjádříme λ, z druhé rovnice vyjádříme λ, hodnoty λ porovnáme a dostaneme, že $x = 5y$. Dosadíme do vazebné rovnice, tj.

$$5y + y = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

K tomu dopočteme hodnotu $x = \frac{5}{2}$ a získáváme stacionární bod $x^* = [\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$. Spočteme druhé derivace Lagrangeovy funkce L v bodě x^*,

$$L''(x^*) = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix}\Bigg|_{[\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Určíme $h = (h_1, h_2)$ splňující podmínku (9.3). Pro bod $x^* = [\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$ dostáváme $G(x^*) = (1, 1)$ a

$$\langle G(x^*), h\rangle = h_1 + h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = -h_2, \text{ tj. } h = (-t, t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\langle L''(x^*)h, h\rangle = (-t, t) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = -6t^2 < 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x^* je podle věty 9.6 lokální maximum.

Příklad 9.10. Určete lokální vázané extrémy funkce $f(x, y, z) = x-2y+2z$ vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Řešení. Úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Hodnost matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}) =$

$(2x, 2y, 2z)$ je různá od 1 pouze v nulovém bodě, který však nevyhovuje vazebné podmínce. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y, z a položíme je rovny nule, tj.

$$\begin{aligned} L_x &= 1 + 2x\lambda = 0, \\ L_y &= -2 + 2y\lambda = 0, \\ L_z &= 2 + 2z\lambda = 0. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Spolu s vazbou získáme soustavu čtyř rovnic o čtyrech neznámých vedoucí na výpočet stacionárních bodů Lagrangeovy funkce L. Z rovnic (9.6) plyne, že $\lambda \neq 0$. Kdyby platilo, že $\lambda = 0$, pak bychom z první rovnice v (9.6) dostali, že $1 = 0$. Tedy vyjádřené hodnoty x, y a z z rovnic (9.6)

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda}, \quad z = -\frac{1}{\lambda},$$

dosadíme do vazební rovnice,

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{3}{2},\ \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

Pro $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ dopočítáme $x_1 = \frac{1}{3}$, $y_1 = -\frac{2}{3}$, $z_1 = \frac{2}{3}$ a získali jsme stacionární bod $x_1^* = [\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. Stejně postupujeme pro hodnotu $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{2}{3}$, $z_2 = -\frac{2}{3}$, tedy $x_2^* = [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' jednotlivé stacionární body a příslušné hodnoty λ:

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2};\ L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{2};\ L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2, h_3)$ splňující podmínku (9.3). Pro bod $x_1^* = [\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ dostáváme $G(x_1^*) = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ a

$$\langle G(x_1^*), h\rangle = \frac{2}{3}h_1 - \frac{4}{3}h_2 + \frac{4}{3}h_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = 2h_2 - 2h_3,$$

tj. $h = (2t - 2p, t, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h, h\rangle = (2t-2p, t, p) \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t-2p \\ t \\ p \end{pmatrix} =$$

$$= -15t^2 - 15p^2 + 24pt.$$

To je kvadratická forma záporně definitní, takže v bodě x_1^* nastává ostré lokální maximum.
Pro bod $x_2^* = [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$ nyní určíme $h = (h_1, h_2, h_3)$ splňující podmínku (9.3). Dostáváme $G(x_2^*) = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ a

$$\langle G(x_2^*), h\rangle = -\frac{2}{3}h_1 + \frac{4}{3}h_2 - \frac{4}{3}h_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = 2h_2 - 2h_3,$$

tj. $h = (2t - 2p, t, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_2^*)h, h\rangle = (2t-2p, t, p) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t-2p \\ t \\ p \end{pmatrix} = 15t^2 + 15p^2 - 24pt.$$

Kvadratická forma je kladně definitní, a tedy v bodě x_2^* je ostré lokální minimum.

Příklad 9.11. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině určené rovnostmi $x + y + z = 30$, $x + y - z = 0$.

Řešení. Úlohu vyřešíme dvěma způsoby.
1) Nejdříve ji budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbami $g_1(x, y, z) = x + y + z - 30$, $g_2(x, y, z) = x + y - z$. Hodnost matice $G = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ je 2. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz + \lambda_1(x + y + z - 30) + \lambda_2(x + y - z),$$

spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y, z a položíme je rovny nule. Spolu s vazbou získáme soustavu pěti rovnic o pěti neznámých vedoucí na výpočet stacionárních bodů Lagrangeovy funkci L:

$$\begin{aligned}
L_x &= yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -yz\\
L_y &= xz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -xz\\
L_z &= xy + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 - \lambda_2 = -xy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1(x,y,z) &= x + y + z - 30 = 0,\\
g_2(x,y,z) &= x + y - z = 0.
\end{aligned}$$

Z první a druhé rovnice vyplývá, že $yz = xz$, tedy že $y = x$ nebo $z = 0$. Nejdříve budeme uvažovat případ pro $z = 0$. Po dosazení $z = 0$ do vazebných rovnic dostáváme

$$x + y - 30 = 0 \Rightarrow x = 30 - y, \quad x + y = 0 \Rightarrow x = -y.$$

Tato soustava nemá řešení. Nezískali jsme žádný singulární bod. Dále dosadíme $x = y$ do vazebných rovnic a dostáváme

$$x + x + z - 30 = 0 \Rightarrow 2x + z = 30, \quad x + x - z = 0 \Rightarrow 2x = z.$$

Tedy $x = \frac{15}{2}$. Dopočítáme zbývající souřadnice $y = \frac{15}{2}$, $z = 15$ a hodnoty $\lambda_1 = -\frac{675}{8}$, $\lambda_2 = -\frac{225}{8}$. Získali jsme stacionární bod $x^* = [\frac{15}{2}, \frac{15}{2}, 15]$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz}\\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz}\\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & y\\ z & 0 & x\\ y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární bod x^*:

$$L''(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 15 & \frac{15}{2}\\ 15 & 0 & \frac{15}{2}\\ \frac{15}{2} & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2, h_3)$ splňující podmínku (9.3). Pro bod $x^* = [\frac{15}{2}, \frac{15}{2}, 15]$ dostáváme $G(x^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a

$$\langle G(x^*), h\rangle = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 + h_3\\ h_1 + h_2 - h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_1 = -h_2, \quad h_3 = 0,$$

tj. $h = (t, -t, 0)$, $t, \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x^*)h, h\rangle = (t, -t, 0) \begin{pmatrix} 0 & 15 & \frac{15}{2}\\ 15 & 0 & \frac{15}{2}\\ \frac{15}{2} & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\\ -t\\ 0 \end{pmatrix} = -30t^2 < 0 \text{ pro } t \neq 0.$$

V bodě x^* nastává lokální maximum.

2) Úlohu můžeme řešit také přímým vyjádřením proměnné y z vazebné rovnice g_2, tj.

$$g_2(x, y, z) = x + y - z = 0 \Rightarrow y = z - x.$$

Tento vztah dosadíme do zadané funkce $f(x, y, z) = xyz$ a vazby g_1, dostaneme

$$F(x, z) = f(x, z - x, z) = xz^2 - x^2 z,$$

$$G(x, z) = x + z - x + z - 30 = 2z - 30,$$

jelikož $G(x, z) = 0$, pak $z = 15$. Tuto hodnotu dosadíme do vztahu pro $F(x, z)$ a získáváme

$$\bar{F}(x) = F(x, 15) = 225x - 15x^2.$$

Zadanou úlohu jsme tedy převedli na úlohu hledání extrémů funkce jedné proměnné. Platí

$$\bar{F}'(x) = 225 - 30x = 0 \;\Rightarrow\; 30x = 225 \;\Rightarrow\; x = \frac{15}{2}.$$

Spočteme druhou derivaci $\bar{F}''(x) = -30 < 0$. Protože je druhá derivace záporná, má funkce $\bar{F}$ v bodě $x = \frac{15}{2}$ lokální maximum. Dopočítáme $y = \frac{15}{2}$. Z toho plyne, že funkce $f(x, y, z) = xyz$ má v bodě $[\frac{15}{2}, \frac{15}{2}, 15]$ vázané lokální maximum.

Příklad 9.12. Z 12 m^2 lepenky se má vyrobit krabice bez víka. Určete její maximální objem.

Řešení. Označme x, y rozměry dna a z výšku krabice. Podle zadání máme spočíst maximální objem krabice $V(x, y, z)$, je-li povrch $xy + 2xz + 2yz = 12$ zadaný. Hledáme tedy vázané maximum funkce $V(x, y, z) = xyz$ s vazbou $xy + 2xz + 2yz = 12$. Úlohu můžeme řešit dvěma způsoby:
1) Metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou o rovnici

$$g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 12.$$

Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - 12),$$

spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y, z a položíme je rovny nule. Spolu s vazbou získáme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých vedoucí na výpočet stacionárních bodů Lagrangeovy funkce L:

$$\begin{aligned} L_x &= yz + \lambda(y+2z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{yz}{y+2z} \\ L_y &= xz + \lambda(x+2z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{xz}{x+2z} \\ L_z &= xy + \lambda(2x+2y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{xy}{2x+2y} \end{aligned}$$

$$g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0.$$

Z porovnání první a druhé rovnice vyplývá, že $y = x$, je-li $z \neq 0$. Dosazením $x = y$ do třetí rovnice získáváme $x = 4\lambda$, $y = 4\lambda$. A tím tedy z druhé rovnice máme, že $z = 2\lambda$. Dosazením za x, y, z do rovnice vazby máme $\lambda = \frac{1}{2}$. Nalezli jsme jediný stacionární bod $x^* = [2,2,1]$. Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z+\lambda & y+2\lambda \\ z+\lambda & 0 & x+2\lambda \\ y+2\lambda & x+2\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární bod x^* a hodnotu $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$L''(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice, pro které platí $D_1(x^*) = 0$, $D_2(x^*) = \frac{9}{4} > 0$, $D_3(x^*) = 27 > 0$. Podle kritéria nenastává v bodě x^* extrém funkce L, což ještě neříká, že funkce f nemůže mít extrém vzhledem ke g.
2) Úlohu můžeme řešit také přímým vyjádřením proměnné z z vazebné rovnice g, tj.

$$g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0 \Rightarrow z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}.$$

Tento vztah dosadíme do dané funkce $V(x,y,z) = xyz$ a dostaneme

$$F(x,y) = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}.$$

Úlohu na vázaný extrém funkce V jsme převedli na úlohu o lokálních extrémech funkce F. Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Platí

$$F_x = \frac{y^2(12 - x^2 - 2xy)}{2(x+y)^2} = 0, \quad F_x = \frac{x^2(12 - y^2 - 2xy)}{2(x+y)^2} = 0.$$

Ze vztahů $F_x = 0$, $F_y = 0$ vyplývá $x = 0$, $y = 0$. Toto řešení však nebudeme uvažovat. Položíme-li $12 - y^2 - 2xy = 0$, $12 - x^2 - 2xy = 0$, obdržíme další řešení. Tedy $x^2 = y^2$, z čehož plyne rovnost $x = y$ (zajímají nás pouze kladné hodnoty s ohledem na rozměry krabice). Nalezli jsme jediný stacionární bod $x^* = [2, 2]$. Dopočítáme $z = 1$. Spočteme matici druhých parciálních derivací funkce F:

$$F'' = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y^2(y^2+12}{(x+y)^3} & \frac{xy(12-3xy-x^2-y^2}{(x+y)^3} \\ \frac{xy(12-3xy-x^2-y^2}{(x+y)^3} & -\frac{x^2(x^2+12}{(x+y)^3} \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do F'' stacionární bod x^*:

$$F''(x^*) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice. Platí $D_1(x^*) = -1 < 0$, $D_2(x^*) = \frac{3}{4} > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $x^* = [2, 2]$ lokální maximum funkce F a tedy v bodě $[2, 2, 1]$ vázané maximum funkce V. Rozměry krabice jsou $2 \times 2 \times 1$ a objem $V = 4m^3$.

9.2 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 9.1. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 4x + xy - 5y$ na množině určené rovností $x - y = 4$.

Cvičení 9.2. Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$ za podmínky $y = x^2$.

Cvičení 9.3. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = -y + 4$ na množině určené rovností $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

Cvičení 9.4. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 4x(y^2 - 2y + 4)$ na množině určené rovností $xy = \frac{1}{4}$.

Cvičení 9.5. Určete lokální vázané extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y$ vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 = 1$.

Cvičení 9.6. Určete lokální vázané extrémy funkce $f(x, y) = xy$ vzhledem k podmínce $9x^2 + y^2 = 4$.

Cvičení 9.7. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ na množině určené rovností $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Cvičení 9.8. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y, z) = x - y + 3z$ vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

Cvičení 9.9. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x - 2y + z$ na množině určené rovností $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 = 1$.

Cvičení 9.10. Určete lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ vzhledem k podmínkám $x^2 + y^2 = 1$, $x - y + z = 1$.

9.3 Výsledky úloh k samostatnému řešení

Cvičení 9.1. $\lambda = -\frac{5}{2}$, $[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}]$ lokální vázané minimum

Cvičení 9.2. $\lambda = \frac{1}{16}$, $[8, 64]$ lokální vázané minimum

Cvičení 9.3. $\lambda = \frac{1}{2}$, $[2, 3]$ lokální vázané minimum, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $[2, 1]$ - lokální vázané maximum

Cvičení 9.4. $\lambda = -8$, $[\frac{1}{8}, 2]$ lokální vázané minimum, $\lambda = 24$, $[-\frac{1}{8}, -2]$ lokální vázané maximum

Cvičení 9.5. $\lambda = -\frac{1}{2}$, $[0, 1]$ vázané lokální minimum, $\lambda = \frac{1}{2}$, $[0, -1]$ lokální vázané minimum, $\lambda = -1$, $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ lokální vázané maximum, $\lambda = -1$, $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ lokální vázané maximum

Cvičení 9.6. $\lambda = \frac{1}{6}$, $[-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}]$ vázané lokální minimum, $\lambda = \frac{1}{6}$, $[\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}]$ lokální vázané minimum, $\lambda = -\frac{1}{6}$, $[\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}]$ vázané lokální maximum, $\lambda = -\frac{1}{6}$, $[-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}]$ lokální vázané maximum

Cvičení 9.7. $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ lokální vázané minimum, $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ lokální vázané maximum

Cvičení 9.8. $\lambda = \frac{\sqrt{17}}{8}$, $[-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$ lokální vázané minimum,
$\lambda = -\frac{\sqrt{17}}{8}$, $[\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$ lokální vázané maximum

Cvičení 9.9. $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[\frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ lokální vázané maximum, $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ lokální vázané minimum

Cvičení 9.10. $\lambda_1 = \frac{\sqrt{29}}{2}$, $\lambda_2 = -3$, $[\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}]$ lokální vázané minimum, $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\lambda_2 = -3$, $[-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1+\frac{7}{\sqrt{29}}]$ lokální vázané maximum

10 Globální extrémy

Klíčová slova. Globální minimum, globální maximum.

Podobně jako u funkcí jedné proměnné je třeba rozlišovat mezi lokálními a globálními extrémy. U lokálních extrémů jsme zkoumali danou funkci pouze lokálně, tj. v okolí nějakého bodu. O globálních extrémech mluvíme v případě, že je zadána množina a na této množině hledáme bod, v němž funkce nabývá největší resp. nejmenší hodnoty.

10.1 Vyšetřování globálních extrémů

Definice 10.1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathcal{D}(f)$, $x^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*] \in M$. Řekneme, že funkce f má v bodě x^* **globální maximum na** M, jestliže $\forall x \in M$ platí $f(x) \leq f(x^*)$.
Řekneme, že funkce f má v bodě x^* **globální minimum na** M, jestliže $\forall x \in M$ platí $f(x) \geq f(x^*)$. Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x^*$ ostré, mluvíme o ostrých globálních extrémech. Místo termínu globální extrém se používá často pojem **absolutní** extrém.

Je-li množina M kompaktní a funkce f spojitá, pak podle Weierstrassovy věty 2.17 ihned plyne tvrzení o existenci globálních extrémů. V kterých bodech globálních extrémů může funkce f nabýt, říká následující věta.

Věta 10.2. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina (tj. uzavřená a ohraničená) a funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálního extrému ležících uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.*

Poznámka 10.3.

1. V případě, že globální extrém nastane uvnitř množiny M, je globální extrém zároveň i lokální extrém. Ale opak neplatí, tj. má-li daná funkce v některém bodě lokální extrém, nemusí být extrémem globálním.

2. Pokud globální minimum a globální maximum existují, pak jsou určena jednoznačně. Funkce může těchto hodnot nabývat obecně ve více bodech.

3. Hranice množiny M lze často popsat pomocí rovnic. Vyšetřování hranice množiny M vede k vázaným extrémům. Pokud je hranice tvořena více křivkami, vyšetřují se vázané extrémy na jednotlivých křivkách.

Předchozí věta poskytuje návod pro nalezení globálních extrémů diferencovatelných funkcí na kompaktních množinách. Postupovat budeme následovně:
1) Najdeme stacionární body ležící uvnitř množiny M a určíme jejich funkční hodnoty. Nebudeme ověřovat, zda se jedná o lokální extrémy. Je to zbytečné a obvykle i pracné vylučovat stacionární body, v nichž extrém nenastává. Tím sice vypočteme funkční hodnoty i v nepotřebných bodech, ale ty se stejně neuplatní.
2) Vyšetříme funkci f na hranici množiny M, tj. určíme vázané extrémy funkce f. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech vázaných extrémů. Pokud je hranice tvořena více křivkami, je nutno spočíst funkční hodnoty i ve vrcholech hraničních křivek, tj. v průnicích různých vazeb.
3) Porovnáme všechny spočtené funkční hodnoty. Extrém s největší funkční hodnotou je globální maximum, extrém s nejmenší funkční hodnotou je globální minimum.

Příklad 10.4. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = 5x^2+y^2-4y-10x$ na množině M dané nerovností $5x^2+y^2 \leq 25$.

Řešení. Množina M je kompaktní a funkce f je spojitá, pak dle věty 10.2 na množině M existuje maximum a minimum funkce f. V tomto případě je množina M zadána elipsou, viz obrázek 18.

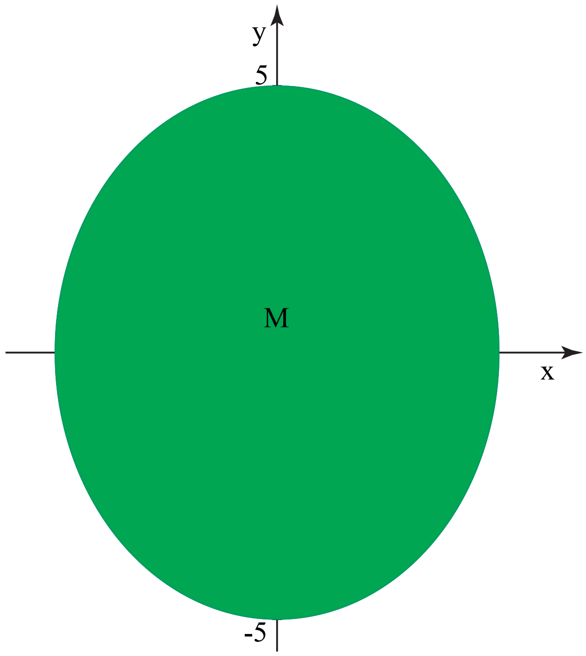
Nejprve hledáme lokální extrémy funkce f uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$f_x(x,y) = 10x - 10 = 0 \quad \Rightarrow x = 1, \quad f_y(x,y) = 2y - 4 = 0 \quad \Rightarrow y = 2.$$

Dostali jsme bod $x_1^* = [1,2]$. Je nutno ověřit, zda tento bod skutečně leží uvnitř množiny M. Dosadíme jej do zadané nerovnosti a zjistíme, že nerovnosti elipsy vyhovuje. Bod $x_1^* = [1,2]$ je první bod podezřelý z extrému.
Dále hledáme body extrému funkce f na hranici množiny M. Sestavíme Lagrangeovu funkci s vazbou $g(x,y) = 5x^2+y^2-25 = 0$. Z příkladu 9.8 víme, že funkce f má dva stacionární body, tj. $x_2^* = [\frac{5}{3}, \frac{10}{3}]$ a $x_3^* = [-\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}]$. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech, hodnoty porovnáme a rozhodneme o existenci globálních extrémů funkce f,

$$f(x_1^*) = -9, \;\; f(x_2^*) = -15, \;\; f(x_3^*) = 65 \;\; \Rightarrow \;\; f(x_2^*) < f(x_1^*) < f(x_3^*).$$

Funkce f má v bodě $x_2^* = [\frac{5}{3}, \frac{10}{3}]$ globální minimum a v bodě $x_3^* = [-\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}]$ globální maximum.



Obrázek 18: Množina M

Příklad 10.5. Na množině M dané nerovnostmi $5x^2 + y^2 \leq 25$, $x \geq 0$ najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = 5x^2 + y^2 - 4y - 10x$.

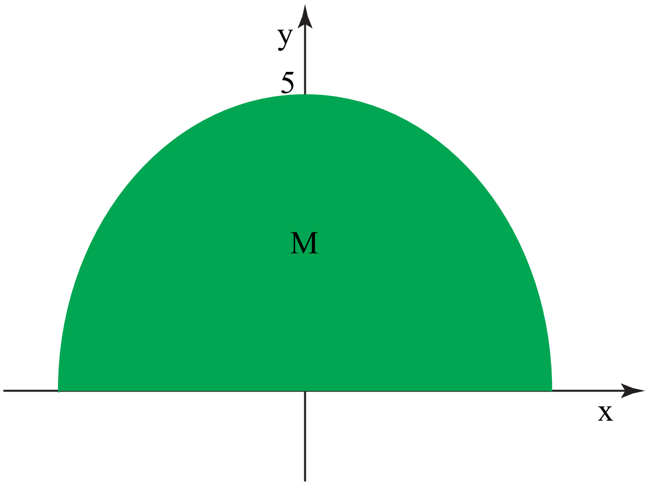
Řešení. Existence maxima a minima opět plyne z věty 10.2. Nejprve hledáme lokální extrémy funkce f uvnitř množiny M (obrázek 19).

Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$f_x(x, y) = 10x - 10 = 0 \quad \Rightarrow x = 1, \quad f_y(x, y) = 2y - 4 = 0 \quad \Rightarrow y = 2.$$

Dostali jsme bod $x_1^* = [1, 2]$. Je nutno ověřit, zda tento bod skutečně leží uvnitř množiny M. Dosadíme jej do zadaných nerovností a zjistíme, že nerovnosti elipsy vyhovuje a také je splněna podmínka $x \geq 0$.
Dále hledáme body extrému funkce f na hranici množiny M, která je tvořena obloukem elipsy a úsečkou. Uvažujeme-li funkci f s vazbou $g(x, y) = 5x^2 + y^2 - 25 = 0$ pro $x > 0$, sestavíme Lagrangeovu funkci s touto vazbou a dle předchozího příkladu dostáváme pouze bod $x_2^* = [\frac{5}{3}, \frac{10}{3}]$.
Uvažujeme-li $x = 0$, pak $y \in (-5, 5)$. Přímým dosazením $x = 0$ do zadané funkce $f(x, y) = 5x^2 + y^2 - 4y - 10x$ dostáváme funkci jedné proměnné $F(y) = y^2 - 4y$. Platí

$$F'(y) = 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \in (-5, 5).$$



Obrázek 19: Množina M

Nalezli jsme stacionární bod $x_3^* = [0, 2]$.
Nyní je zapotřebí vyšetřit i krajní body $[0, -5]$, $[0, 5]$, které jsou průniky různých vazeb.
Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech, hodnoty porovnáme a rozhodneme o existenci globálních extrémů funkce f,

$$f(x_1^*) = -9, \;\; f(x_2^*) = -15, \;\; f(x_3^*) = -4, \;\; f(0, -5) = 45, \;\; f(0, 5) = 5,$$

$$f(x_2^*) < f(x_1^*) < f(x_3^*) < f(0, 5) < f(0, -5).$$

Funkce f má v bodě $x_2^* = [\frac{5}{3}, \frac{10}{3}]$ globální minimum a v bodě $[0, -5]$ globální maximum.

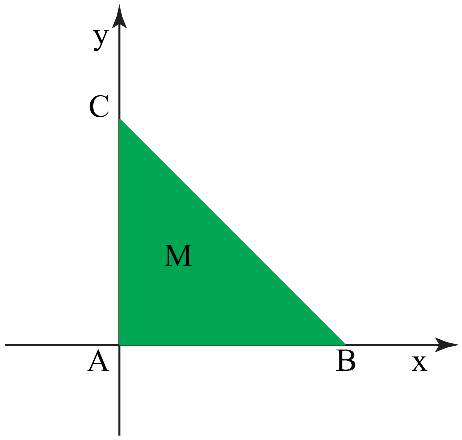
Příklad 10.6. Na množině M dané nerovnostmi $y \geq 0$, $x \geq 0$, $y \leq 3 - x$ najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$.

Řešení. Množina M je tvořena trojúhelníkem s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [3, 0]$, $C = [0, 3]$ a všemi body, které v něm leží, obrázek 20. Existence maxima a minima opět plyne z věty 10.2.

Nejprve hledáme lokální extrémy funkce f uvnitř množiny M, tj. uvnitř trojúhelníku ABC. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule,

$$f_x(x, y) = 2x + 3y = 0 \;\; \Rightarrow 2x = -3y, f_y(x, y) = 3x - 2y = 0 \;\; \Rightarrow 3x = 2y$$

a nalezneme stacionární bod $x_1^* = [0, 0]$. Tento bod neleží uvnitř trojúhelníku ABC. Nemá smysl hledat v tomto bodě extrém funkce f.



Obrázek 20: Množina M

Hranice množiny M je tvořena třemi úsečkami. Úloha hledání vázaných extrémů funkce f se tedy rozpadá na tři případy, tj. na jednotlivé úsečky zadaného trojúhelníku.

a) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y) = x = 0$ pro $y \in (0, 3)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné x z rovnice vazby, tj $x = 0$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(y) = -y^2$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(y) = -2y = 0$$

a získáváme stacionární bod $y = 0$, který však neleží v intervalu $(0, 3)$, a tedy vázaný extrém na této úsečce neleží.

b) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y) = y = 0$ pro $x \in (0, 3)$. S jednoznačným vyjádřením $y = 0$ přejdeme na hledání lokálního extrému funkce $F(x) = x^2$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule, tj.

$$F'(x) = 2x = 0,$$

a získáváme stacionární bod $x = 0$, který však neleží v intervalu $(0, 3)$.

c) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y) = y + x - 3 = 0$ pro $x \in (0, 3)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné y z rovnice vazby, tj $y = 3 - x$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce

$$F(x) = x^2 + 3x(3-x) - (3-x)^2 = -3x^2 + 15x - 9.$$

Derivaci této funkce položíme rovnu nule

$$F'(x) = -6x + 15 = 0 \ \Rightarrow x = \frac{5}{2} \in (0,3).$$

Nalezli jsme stacionární bod $x_2^* = [\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$.

Zbývá vyšetřit vrcholy trojúhelníku ABC, které jsou průniky různých vazeb. Spočteme jednotlivé funkční hodnoty v nalezených bodech a porovnáme je

$$f(x_2^*) = \frac{39}{4}, \ f(A) = 0, \ f(B) = 9, \ f(C) = -9,$$

$$f(C) < f(A) < f(B) < f(x_2^*).$$

Funkce f má v bodě $x_2^* = [\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$ globální maximum a v bodě $C = [0,3]$ globální minimum.

Příklad 10.7. Na množině M dané nerovností $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ určete globální extrémy funkce $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$.

Řešení. Existence maxima a minima plyne z věty 10.2. Množina M je tvořena koulí o poloměru 1 a všemi body v ní ležícími.
Nejprve hledáme lokální extrémy funkce f uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace

$$f_x(x,y,z) = 1, \ f_y(x,y,z) = -2, \ f_z(x,y,z) = 2$$

a položíme je rovny nule. Tuto podmínku ovšem žádný bod množiny M nesplňuje.
Dále hledáme extrémy funkce f na hranici množiny M. Sestavíme Lagrangeovu funkci s vazební rovnicí $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Vypočteme stacionární body jako v příkladu 9.10, tj. $x_1^* = [\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ a $x_2^* = [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech, hodnoty porovnáme a rozhodneme o existenci globálních extrémů funkce f,

$$f(x_1^*) = 3, \ f(x_2^*) = -3 \ \Rightarrow \ f(x_2^*) < f(x_1^*).$$

V bodě x_2^* nastává globální minimum funkce f a v bodě x_1^* nabývá funkce f svého globálního maxima.

Poznámka 10.8. Ve výše popsaném postupu hledání globálních extrémů jsme vycházeli z toho, že globální extrémy existují, což bylo zaručeno pomocí věty 10.2. Pokud by některý z předpokladů této věty byl vynechán, nemusely by globální extrémy vůbec existovat. V tomto případě je úloha hledání extrémů velmi složitá a žádný univerzální postup neexistuje.

V následujícím příkladu si ukážeme, že jednou z možností, jak hledat globální extrém bez splnění předpokladů věty 10.2, je nalezení lokálních extrémů a u nich je potřeba dokázat, zda se jedná o extrémy globální či nikoli. K tomu bude ještě zapotřebí následující lemma.

Lemma 10.9. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n$ jsou kladná čísla. Potom platí*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}. \tag{10.1}$$

Rovnosti nastanou pouze v případě, že $x_1 = \dots = x_n$, tj. všechna čísla jsou stejná.

Příklad 10.10. Z 12 m^2 lepenky se má vyrobit krabice bez víka. Určete její maximální objem.

Řešení. Označme x, y rozměry dna a z výšku krabice, kde $x, y, z > 0$. Podle zadání máme spočíst maximální objem krabice $V(x, y, z)$, je-li povrch krabice $S = xy + 2xz + 2yz = 12$ zadaný. Hledáme tedy lokální maximum funkce $V(x, y, z) = xyz$ s vazbou $xy + 2xz + 2yz = 12$. Úlohu můžeme řešit dvěma způsoby.
1) Úlohu můžeme řešit také přímým vyjádřením proměnné z z vazebné rovnice g, tj.

$$g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0 \Rightarrow z = \frac{12 - xy}{2(x + y)}.$$

Jelikož $x, y, z > 0$ a povrch krabice je 12, musí být $xy < 12$. Krabice o rozměrech x, y, $z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$ tedy existuje, pokud zvolíme libovolná $x, y > 0$ tak, aby platilo $xy < 12$. Pak dosazením za z do dané funkce $V(x, y, z) = xyz$ obdržíme

$$F(x, y) = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}.$$

Úlohu na vázaný extrém funkce $V(x, y, z)$ jsme převedli na úlohu o lokálních extrémech funkce $F(x, y)$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, xy < 12\}$. Tato množina není uzavřená, ani ohraničená, tudíž v dalším výpočtu nelze použít větu 10.2. Není tedy zaručeno, že hledané globální maximum existuje. Pokud existuje bod nabývající globálního maxima, pak je tento bod současně bodem lokálního maxima, protože žádný hraniční bod do množiny M nepatří. V dalším postupu budeme hledat lokální extrémy. Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Platí

$$F_x = \frac{y^2(12 - x^2 - 2xy)}{2(x+y)^2} = 0, \quad F_x = \frac{x^2(12 - y^2 - 2xy)}{2(x+y)^2} = 0.$$

Ze vztahů $F_x = 0$, $F_y = 0$ vyplývá $x = 0$, $y = 0$. Toto řešení však nebudeme uvažovat, protože rozměry $x > 0$, $y > 0$. Další řešení obdržíme, položíme-li $12 - y^2 - 2xy = 0, 12 - x^2 - 2xy = 0$. Tedy $x^2 = y^2$, z čehož plyne rovnost $x = y$ (zajímají nás pouze kladné hodnoty s ohledem na rozměry krabice). Nalezli jsme jediný stacionární bod $\bar{x}^* = [2, 2]$. Dalším výpočtem pomocí druhých derivací funkce F bychom zjistili, zda je bod $\bar{x}^* = [2, 2]$ bodem lokálního maxima. Tento výpočet by mohl být pracný a stejně bychom se nedozvěděli, zda v tomto bodě je extrém globální či nikoli.
Dopočítáme $z = 1$. A dostáváme, že rozměry krabice jsou $2 \times 2 \times 1$ a objem $V = 4$ m^3.
Doposud jsme zjistili, že pokud globální maximum existuje, pak musí být v bodě $[2, 2, 1]$. Nyní použijeme lemma 10.9, abych ukázali, že skutečně v bodě $[2, 2, 1]$ je globální maximum. Pro $n = 3$ položíme $x_1 = xy$, $x_2 = 2xz$, $x_3 = 2yz$ a dosadíme do pravé nerovnosti ve vztahu (10.1), tj.

$$\sqrt[3]{4x^2y^2z^2} \le \frac{xy + 2xz + 2yz}{3}.$$

Čitatel zlomku na pravé straně není nic jiného, než povrch krabice $S = 12$, tedy

$$\sqrt[3]{4x^2y^2z^2} \le 4 \quad \Rightarrow \quad xyz \le 4.$$

Tím jsme ověřili, že bod $[2, 2, 1]$ je globálním maximem.

2) Metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou o rovnici

$$g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 12.$$

Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}) = (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y)$ má hodnost 1. Hodnost této matice G by byla nulová pouze v případě, že $x = y = z = 0$. Ale tento bod nesplňuje vazebnou podmínku. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - 12),$$

spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y, z a položíme je rovny nule. Spolu s vazbou získáme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých vedoucí na výpočet stacionárních bodů Lagrangeovy funkce L:

$$\begin{aligned}
L_x &= yz + \lambda(y+2z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{yz}{y+2z},\\
L_y &= xz + \lambda(x+2z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{xz}{x+2z},\\
L_z &= xy + \lambda(2x+2y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{xy}{2x+2y},
\end{aligned}$$

$$g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0.$$

Z porovnání první a druhé rovnice vyplývá, že $y = x$, jelikož $z > 0$. Dosazením $x = y$ do třetí rovnice získáváme $x = 4\lambda$, $y = 4\lambda$. A tím tedy z druhé rovnice máme, že $z = 2\lambda$. Dosazením za x, y, z do rovnice vazby máme $\lambda = \frac{1}{2}$. Nalezli jsme jediný stacionární bod $x^* = [2,2,1]$. Zbývá ověřit, zda se jedná o bod globálního maxima. K tomu využijeme lemma 10.9, postup viz výše.

10.2 Úlohy k samostatnému řešení a kontrolní otázky

Cvičení 10.1. Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - 5y$ na množině M určené nerovnostmi $x - y \geq 4$, $x \geq 0$, $y \leq 0$.

Cvičení 10.2. Na množině M dané nerovnostmi $x^2+y^2 \leq 1$, $|y| \leq x$ najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = xy$.

Cvičení 10.3. Na množině M dané nerovností $x^2+y^2 \leq 1$ najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$.

Cvičení 10.4. Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $M = \langle 0,2\rangle \times \langle -1,2\rangle$.

Cvičení 10.5. Na množině M dané nerovnostmi $x^2 \leq y$, $y \leq 4$ najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = xy - x + y - 1$.

Cvičení 10.6. Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2+2xy-4x+8y$ na množině $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$.

Cvičení 10.7. Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2+y^2$ na množině M, která je tvořena trojúhelníkem s vrcholy v bodech $A = [0,0]$, $B = [2,0]$, $C = [0,1]$.

Cvičení 10.8. Najděte globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ na množině M určené nerovností $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Cvičení 10.9. Najděte globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x - y + 3z$ na množině M určené nerovností $x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4$.

Cvičení 10.10. Najděte globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na množině M dané nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq z$, $z \leq 1$.

Otázka 10.1. Co je to kvadratická forma?

Otázka 10.2. Jaké druhy kvadratických forem rozeznáváme?

Otázka 10.3. Jaké kritérium slouží k určení druhu kvadratické formy?

Otázka 10.4. Jak je definován lokální extrém funkce více proměnných?

Otázka 10.5. Vysvětlete rozdíl mezi lokálním a globálním extrémem.

Otázka 10.6. Co je to stacionární bod funkce?

Otázka 10.7. Má funkce ve stacionárním bodě nutně lokální extrém?

Otázka 10.8. Vysvětlete jak souvisí kvadratické formy s hledáním lokálních extrémů funkce n proměnných.

Otázka 10.9. Jak poznáme indefinitní kvadratickou formu?

Otázka 10.10. Formulujte extremální úlohu, která má reálnou interpretaci.

Otázka 10.11. Co jsou to vázané extrémy?

Otázka 10.12. Jak určíme stacionární bod úlohy na vázaný extrém?

Otázka 10.13. Za jakých podmínek bude v bodě x^* lokální maximum úlohy na vázaný extrém?

Otázka 10.14. Jaký je princip Lagrangeovy metody?

Otázka 10.15. Jaký je geometrický význam vázaných extrémů?

Otázka 10.16. Co jsou to globální extrémy?

Otázka 10.17. Jak globální extrémy hledáme?

Otázka 10.18. Za jakých podmínek bude v bodě x^* globální minimum úlohy na vázaný extrém?

Otázka 10.19. Může existovat více bodů, ve kterých bude funkce nabývat své největší, resp. nejmenší hodnoty?

Otázka 10.20. Nechť funkce f má v bodě P lokální minimum. Bude tato funkce v bodě P nabývat i globálního minima?

10.3 Výsledky úloh k samostatnému řešení

Cvičení 10.1. $[0, -4]$ globální maximum, $[0, 0]$ globální minimum

Cvičení 10.2. $[\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}]$ globální maximum, $[\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}]$ globální minimum

Cvičení 10.3. $[-1, 0]$ globální maximum, $[1, 0]$ globální minimum

Cvičení 10.4. $[2, -1]$ globální maximum, $[0, -1]$ a $[1, 1]$ globální minima

Cvičení 10.5. $[2, 4]$ globální maximum, $[-2, 4]$ globální minimum

Cvičení 10.6. $[1, 2]$ globální maximum, $[1, 0]$ globální minimum

Cvičení 10.7. $[2, 0]$ globální maximum, $[0, 0]$ globální minimum

Cvičení 10.8. $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ globální maximum, $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ globální minimum

Cvičení 10.9. $[\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$ globální maximum, $[-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$ globální minimum

Cvičení 10.10. $[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1]$ globální maximum, $[-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{36}]$ globální minimum

10.4 Kontrolní test

Start testu **Extrémy funkcí**

1. Kvadratická n-ární forma Φ se nazývá záporně definitní, jestliže

- ☐ ve všech bodech různých od počátku nabývá pouze záporných nebo nulových hodnot
- ☐ kvadratická forma $-\Phi$ je kladně definitní
- ☐ ve všech bodech různých od počátku nabývá pouze záporných hodnot

2. Kvadratická forma $\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$ je

- ☐ kladně definitní
- ☐ záporně definitní
- ☐ indefinitní

3. Ve stacionárním bodě má funkce f

- ☐ lokální extrém, přičemž o druhu extrému je dále nutné rozhodnout
- ☐ lokální extrém, jestliže je na nějakém okolí daného bodu ohraničená
- ☐ může, ale nemusí mít lokální extrém

4. Tečná rovina ke gafu funkce $f(x, y) = (2x^2+3y^2)$ je rovnoběžná s rovinou xy v bodech

- ☐ $[0, 0, 0]$, $[1, 0, 2/e]$, $[0, 1, 3/e]$
- ☐ $[0, 1, 2/e]$, $[-1, 0, 2/e]$, $[0, -1, 3/e]$
- ☐ $[0, 1, 3/e]$, $[1, 0, 3/e]$, $[0, -1, 2/e]$

5. Funkce $f(x, y) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 4x + y$ má stacionární body tohoto druhu

- ☐ $[1/2, 1]$ sedlový bod, $[1/2, -1]$ lokální minimum
- ☐ $[-1/2, -1]$ sedlový bod, $[-1/2, 1]$ lokální minimum
- ☐ $[-1/2, -1]$ sedlový bod, $[-1/2, 1]$ lokální maximum

6. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = xy$ vzhledem k vazební podmínce $y = \ln x$.

- ☐ $[1, -1]$ vázané lokální minimum
- ☐ $[e^2, -2]$ vázané lokální maximum
- ☐ $[e^{-1}, -1]$ vázané lokální minimum

☐ $[1, e^{-1}]$ vázané lokální maximum

7. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = 2x + y$ vzhledem k podmínce $x^2 + 4y^2 = 1$.

☐ $[\frac{1}{17}, \frac{4}{17}]$ vázané lokální minimum, $[-\frac{4}{17}, \frac{1}{\sqrt{17}}]$ vázané lokální maximum

☐ $[\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{68}}]$ vázané lokální maximum, $[-\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{2\sqrt{17}}]$ vázané lokální minimum

☐ $[-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}]$ vázané lokální maximum, $[\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{36}}]$ vázané lokální minimum

☐ $[\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}]$ vázané lokální minimum, $[\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{36}}]$ vázané lokální minimum

8. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = 2x + y^2$ na trojúhelníku s vrcholy $[0,-1]$, $[2,0]$, $[0,2]$.

(a) Funkce $f(x,y)$ má na dané množině globální minimum v bodě [☐,☐]

(b) Dále funkce $f(x,y)$ má na dané množině následující extrémy:

☐ $[0,2]$ globální minimum, $[-2,0]$ globální maximum

☐ $[0,-2]$ globální maximum, $[-2,0]$ globální maximum

☐ $[0,-2]$ globální minimum, $[-2,0]$ globální maximum

☐ $[0,2]$ globální maximum, $[2,0]$ globální maximum

9. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 4y - 5$ na čtverci s vrcholy $[-2,-2]$, $[1,-2]$, $[1,1]$, $[-2,1]$.

(a) Globální minimum nastává v bodě [☐,☐]

(b) Globální maximum nastává v bodě [☐,☐]

10. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = -x^2 + y^2 - 2y$ na množině dané vztahem $x^2 + y^2 \leq 16$.

(a) Globální maximum nastává v bodě [☐,☐]

(b) Dále funkce $f(x,y)$ má na dané množině následující extrémy:

☐ $[-\frac{\sqrt{63}}{2}, \frac{1}{2}]$ globální maximum, $[\frac{\sqrt{63}}{2}, -\frac{1}{2}]$ globální minimum

☐ $[-\frac{3\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}]$ globální minimum, $[\frac{\sqrt{63}}{2}, \frac{1}{2}]$ globální maximum

☐ $[-\frac{\sqrt{63}}{2}, \frac{1}{2}]$ globální minimum, $[\frac{\sqrt{63}}{2}, -\frac{1}{2}]$ globální minimum

☐ $[-\frac{\sqrt{63}}{2}, \frac{1}{2}]$ globální minimum, $[\frac{3\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}]$ globální minimum

Konec testu Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek:

Procento úspěšnosti:

Zobrazení správného výsledku:

Použitá literatura

[1] Došlá, Z. – Došlý O. *Metrické prostory*. Skriptum. 3. vydání. Brno: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, 2006. 8+90 s. ISBN 80-2104160-9.

[2] Došlá, Z. – Došlý O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Skriptum. 3. vydání. Brno: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, 2006. iv, 144 s. ISBN 80-2104159-5.

[3] Došlý, O. *Základy konvexní analýzy a optimalizace v* $\mathbb{R}^n$. Skriptum. 1. vydání. Brno: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, 2005. viii, 186 s. ISBN 80-210-3905-1.

[4] Grossman S. I., *Calculus*, Academic Press, Inc., New York 1981. 1020 s. ISBN 0-12-304360-3.

[5] Jarník V. *Diferenciální počet (I)*, 6. vydání, Praha: Academia, 1974. 391 s.

[6] Jarník V. *Diferenciální počet (II)*, 3. vydání, Praha: Academia, 1976. 669 s.

[7] Jirásek F., Krielgelstein E., Tichý Z., *Sbírka řešených příkladů z matematiky*, Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1990. 817 s. ISBN 80-03-00239-7.

[8] Kuben, J. *Extremální úlohy a optimalizační řízení*. Skriptum. 2. vydání. Brno: Univerzita obrany, 2004. vi, 70 s. ISBN 80-85960-81-8.

[9] Kuben, J. – Mayerová, Š. – Račková, P. – Šarmanová, P. *Diferenciální počet funkcí více proměnných* (obrazovková verze). [online] Dostupné z http://mi21.vsb.cz. Ostrava: Vysoká škola báňská – Technická univerzita, 2012. 476 s.

[10] Novák V., *Diferenciální počet v* $\mathbb{R}$, Brno: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, 1997. 231 s. ISBN 80-210-1561-6.

[11] Novák, V. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Brno: Přírodovědecká fakulta Univerzity J. E. Purkyně v Brně, 1983. 160 s.

[12] Stewart, J. S., *Calculus*, Brooks/Cole Publishing Company, California 1987. 976s. ISBN 0-534-06690-9.

[13] Škrášek, J., Tichý, Z., *Základy aplikované matematiky I,* Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1989. 880 s. ISBN 80-03-015-1.

[14] Škrášek, J., Tichý, Z., *Základy aplikované matematiky II,* Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1986. 896 s.